

Détections de défauts et applications pour les milieux inhomogènes en propagation d'ondes acoustiques

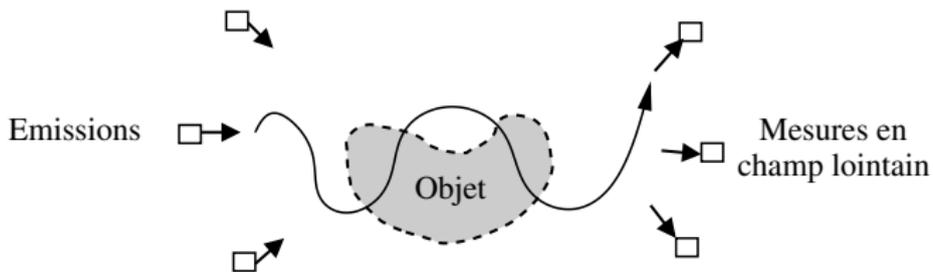
Yann Grisel

Sous la direction de Pierre Mazet, Vincent Mouysset et Jean-Pierre Raymond

ONERA - Toulouse
Université Toulouse 3, Paul Sabatier

Contexte

- Ondes **harmoniques en temps**
- Diffraction acoustique en milieu **inhomogène**
- Emissions de sources "onde plane" à **fréquence constante**, paramétrées par la **direction d'émission**
- Mesures en **champ lointain**



Modélisation

- Système de Helmholtz dans un milieu inhomogène

$$\begin{cases} \Delta u_n + k^2 n(x) u_n = 0, & x \in \mathbb{R}^d \\ \Delta u^i + k^2 u^i = 0 \\ u_n = u^s + u^i \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u^s - i k u^s) = 0 \end{cases}$$

- Indice n non constant dans $D = \text{Support}(n - 1)$
- Comportement asymptotique

$$u_n(x) = u^i(x) + \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} u_n^\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + \mathcal{O}\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right)$$

$$\gamma := \begin{cases} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} & \text{si } d = 2, \\ \frac{1}{4\pi} & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

Problèmes inverses : reconstruction d'informations à partir de mesures

- Reconstruire un indice n^* à partir des mesures en champ lointain $u_{n^*}^\infty$



Figure: Indice donné n

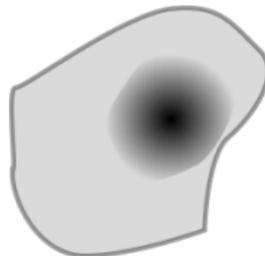


Figure: Indice exact n^*

Objectifs :

- Localiser les différences entre n et n^*
- Intégrer cette connaissance dans une méthode de reconstruction d'indice

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)
- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts
- Conclusion

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)
- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts
- Conclusion

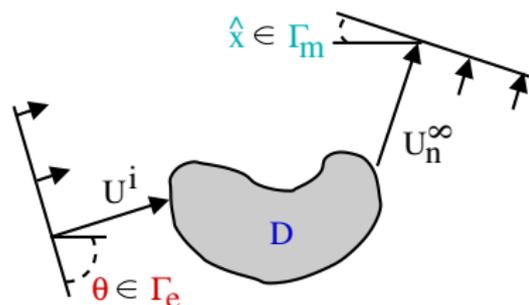


Figure: Onde plane et champ lointain

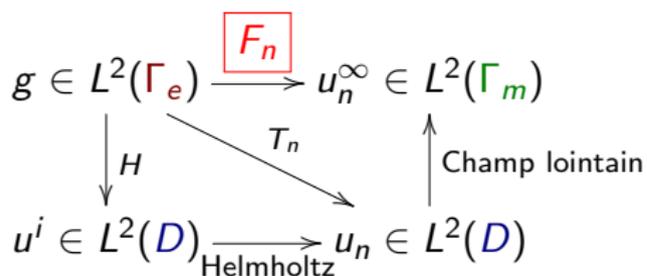


Figure: Schéma de décomposition

- Ondes planes : $u^i(\theta, x) := e^{ik\theta \cdot x}$, $\theta \in \Gamma_e$, $x \in \mathbb{R}^d$
- Fonctions de Herglotz :

$$Hg(x) := \left\langle g, \overline{u^i(\cdot, x)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \quad x \in D, \quad g \in L^2(\Gamma_e)$$

- Opérateur de champ total :

$$T_n g(x) := \left\langle g, \overline{u_n(\cdot, x)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \quad x \in D, \quad g \in L^2(\Gamma_e)$$

- Opérateur de champ lointain :

$$F_n g(\hat{x}) := \left\langle g, \overline{u_n^\infty(\cdot, \hat{x})} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \quad \hat{x} \in \Gamma_m, \quad g \in L^2(\Gamma_e)$$

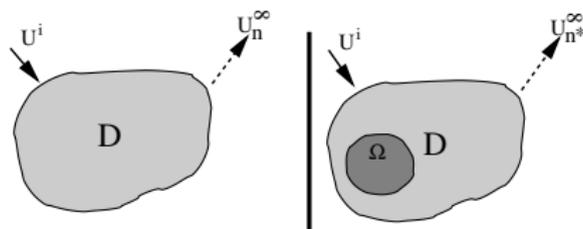


Figure: Objet et mesures avant (à gauche) et après (à droite) apparition de défauts.

- Indice donné / connu : n
- Indice exact / perturbé : n^*
- Opérateur de mesures : $\Delta_F := (F_{n^*} - F_n)$
- Défauts : $\Omega := \text{support}(n^* - n)$

Objectif :

- Localiser les défauts (Ω) à partir des mesures (Δ_F)

1 - Caractérisation de Ω par les sources ponctuelles

Peut-on caractériser Ω à partir du champ lointain ?

Oui : Comparaison des champs lointains engendrés par une **source ponctuelle** avec les champs lointains engendrés par une **source localisée dans les défauts**

- Solution fondamentale :

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n) G_n(z, x) = -\delta_z(x) \\ \text{Condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

- Potentiel volumique localisé sur les défauts :

$$V_n \chi_\Omega f(x) := \left\langle f, \overline{G_n(\cdot, x)} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

- Comportements asymptotiques :

$$G_n^\infty(z, \hat{x})$$

$$V_n^\infty \chi_\Omega f(\hat{x}) = \left\langle f, \overline{G_n^\infty(\cdot, \hat{x})} \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

1 Si $z \in \Omega$, avec f_z un lissage de $G_n(z, x)$ autour de z , alors

$$G_n^\infty(z, \hat{x}) = f_z^\infty(\hat{x}) = V_n^\infty \chi_\Omega \left[(\Delta + k^2 n) f_z \right] (\hat{x})$$

Si $z \notin \Omega$, $V_n \chi_\Omega u^i$ est continue hors de Ω et $G_n(z, \cdot)$ est singulière.

Conclusion : (éq. champ lointain milieu inhomogène)

$$z \in \Omega \iff G_n^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}(V_n^\infty \chi_\Omega)$$

2 Par l'asymptotique de l'équation de Lippmann-Schwinger

$$V_n^\infty f = V_1^\infty \left(f + k^2 (n-1) V_n f \right)$$

on a la relation de réciprocité mixte

$$G_n^\infty(z, \hat{x}) = u_n(-\hat{x}, z)$$

3 Ainsi, avec l'adjoint de l'opérateur de champ total $T_n^* : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_\epsilon)$, défini par

$$T_n^* f(\hat{x}) = \langle f, u_n(\hat{x}, \cdot) \rangle_{L^2(D)}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ on a

$$z \in \Omega \iff \overline{u_n(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(T_n^* \chi_\Omega)$$

→ Méthodes de Linear sampling ou de Factorisation

1 Si $z \in \Omega$, avec f_z un lissage de $G_n(z, x)$ autour de z , alors

$$G_n^\infty(z, \hat{x}) = f_z^\infty(\hat{x}) = V_n^\infty \chi_\Omega \left[(\Delta + k^2 n) f_z \right] (\hat{x})$$

Si $z \notin \Omega$, $V_n \chi_\Omega u^i$ est continue hors de Ω et $G_n(z, \cdot)$ est singulière.

Conclusion : (éq. champ lointain milieu inhomogène)

$$z \in \Omega \iff G_n^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}(V_n^\infty \chi_\Omega)$$

2 Par l'asymptotique de l'équation de Lippmann-Schwinger

$$V_n^\infty f = V_1^\infty \left(f + k^2 (n-1) V_n f \right)$$

on a la relation de réciprocité mixte

$$G_n^\infty(z, \hat{x}) = u_n(-\hat{x}, z)$$

3 Ainsi, avec l'adjoint de l'opérateur de champ total $T_n^* : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_\epsilon)$, défini par

$$T_n^* f(\hat{x}) = \langle f, u_n(\hat{x}, \cdot) \rangle_{L^2(D)}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ on a

$$z \in \Omega \iff \overline{u_n(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(T_n^* \chi_\Omega)$$

→ Méthodes de Linear sampling ou de Factorisation

1 Si $z \in \Omega$, avec f_z un lissage de $G_n(z, x)$ autour de z , alors

$$G_n^\infty(z, \hat{x}) = f_z^\infty(\hat{x}) = V_n^\infty \chi_\Omega \left[(\Delta + k^2 n) f_z \right] (\hat{x})$$

Si $z \notin \Omega$, $V_n \chi_\Omega u^i$ est continue hors de Ω et $G_n(z, \cdot)$ est singulière.

Conclusion : (éq. champ lointain milieu inhomogène)

$$z \in \Omega \iff G_n^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}(V_n^\infty \chi_\Omega)$$

2 Par l'asymptotique de l'équation de Lippmann-Schwinger

$$V_n^\infty f = V_1^\infty \left(f + k^2(n-1)V_n f \right)$$

on a la relation de réciprocité mixte

$$G_n^\infty(z, \hat{x}) = u_n(-\hat{x}, z)$$

3 Ainsi, avec l'adjoint de l'opérateur de champ total $T_n^* : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_e)$, défini par

$$T_n^* f(\hat{x}) = \langle f, u_n(\hat{x}, \cdot) \rangle_{L^2(D)}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ on a

$$z \in \Omega \iff \overline{u_n(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(T_n^* \chi_\Omega)$$

→ Méthodes de Linear sampling ou de Factorisation

2 - Factorisation de l'opérateur de mesures

Caractérisation de l'image d'un opérateur [Nachman, 2007]

Pour tout opérateur linéaire continu L , on a

$$\varphi \in \mathcal{R}(L) \iff \exists c > 0 / \forall \Psi, |\langle \Psi, \varphi \rangle| \leq c \|L^* \Psi\|.$$

■ On a donc :

$$\boxed{z \in \Omega} \iff \overline{u_n(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(T_n^* \chi_\Omega)$$

$$\iff \boxed{\exists c > 0 / \forall \Psi \in L^2(\Gamma_e), |\langle \Psi, \overline{u_n(\cdot, z)} \rangle| \leq c \|\chi_\Omega T_n \Psi\|}$$

■ Principe de la "Factorisation Method" : $\forall A$, opérateur continu et coercif,

$$\begin{aligned} \|\chi_\Omega T_n \Psi\| &= \langle \chi_\Omega T_n \Psi, \chi_\Omega T_n \Psi \rangle_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} = \left\langle \boxed{T_n^* \chi_\Omega \chi_\Omega T_n} \Psi, \Psi \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}^{\frac{1}{2}} \\ &\approx \left\langle \boxed{T_n^* \chi_\Omega A \chi_\Omega T_n} \Psi, \Psi \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Peut-on fabriquer à **partir des mesures** un bloc de la forme $T_n^* \chi_\Omega A \chi_\Omega T_n$ avec A endomorphisme de $L^2(\Omega)$ continu, et coercif ?

1 L'opérateur de mesures Δ_F a une factorisation de la forme

$$\Delta_F = V_n^\infty \chi_\Omega A T_n$$

$$\begin{array}{ccc}
 g \in L^2(\Gamma_e) & \xrightarrow{\Delta_F} & (u_{n^*}^\infty - u_n^\infty) \in L^2(\Gamma_m) \\
 \downarrow T_n & & \uparrow V_n^\infty \chi_\Omega \\
 u_n \in L^2(D) & \xrightarrow{A} & u_{n^*} \in L^2(\Omega)
 \end{array}$$

Figure: Eléments de la factorisation de l'opérateur de mesures.

Problème

On veut une factorisation de la forme $T_n^* \chi_\Omega A \chi_\Omega T_n$

- Peut-on restreindre A à $L^2(\Omega)$?
- L'opérateur Δ_F n'a pas la factorisation voulue : $V_n^\infty f = \left(\overline{T_n(\bar{f})}\right)^* \neq T_n^* f$

Ondes entrantes - Ondes sortantes

$$(u^s + h) = T_n f : \begin{cases} (\Delta + k^2 n) u^s = -k^2(n-1)Hf \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u^s - iku^s) = 0 \end{cases}$$

$$(\bar{u}^s + h) = \overline{T_n(\bar{f})} : \begin{cases} (\Delta + k^2 \overline{n(x)}) \bar{u}^s = -k^2(\overline{n(x)} - 1)Hf \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r \bar{u}^s + ik\bar{u}^s) = 0 \end{cases}$$

- Indices réels
- Données sur toute la sphère ($\Gamma_e = \Gamma_m = S^{d-1}$)
- 2 Avec l'opérateur de scattering $S := (Id + 2ik|\gamma|^2 F_n)$, on a

$$V_n^\infty = ST_n^*$$

- 3 Ainsi, le produit d'opérateurs $S\Delta_F$ a une factorisation de la forme voulue :

$$S\Delta_F = T_n^* A T_n$$

3 - Coercivité du terme central

l'opérateur A est un isomorphisme de $L^2(\Omega)$

- Hypothèse de **contraste** : localement $(n^* - n) > 0$ ou < 0
- k^2 n'est **pas valeur propre de transmission inhomogène**

l'opérateur A est **coercif**

On appelle k^2 valeur propre de transmission inhomogène pour la **paire d'indices** (n^*, n) s'il existe un couple source-solution $(h, u) \in (L^2(\Omega))^2$ non nul tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta + k^2 n)u = -k^2(n^* - n)h \text{ dans } \Omega, \\ (\Delta + k^2 n^*)h = 0 \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

4 - Méthode de localisation des défauts (synthèse)

On a montré

$$\begin{aligned}z \in \Omega &\iff \overline{u_n(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(T_n^* \chi_\Omega) \\ &\iff \exists c > 0 / \forall \Psi \in L^2(\Gamma_e), \left| \left\langle \Psi, \overline{u_n(\cdot, z)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)} \right| \leq c \|\chi_\Omega T_n \Psi\| \\ &\iff \exists c > 0 / \forall \Psi \in L^2(\Gamma_e), \left| \left\langle \Psi, \overline{u_n(\cdot, z)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)} \right| \leq c \langle S \Delta_F \Psi, \Psi \rangle_{L^2(\Gamma_e)}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Théorème ("Inf Criterion") :

$$z \in \Omega \iff \inf \left\{ \langle S \Delta_F \Psi, \Psi \rangle_{L^2(\Gamma_e)}^2, \left\langle \Psi, \overline{u_n(\cdot, z)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)} = 1 \right\} > 0$$

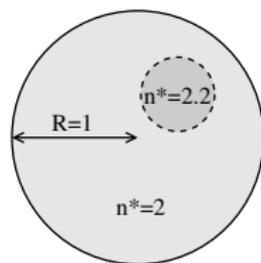


Figure: Objet et défaut

- Diamètre objet ≈ 3 longueurs d'onde ($k=6$)
- 165 mesures, 165 émissions

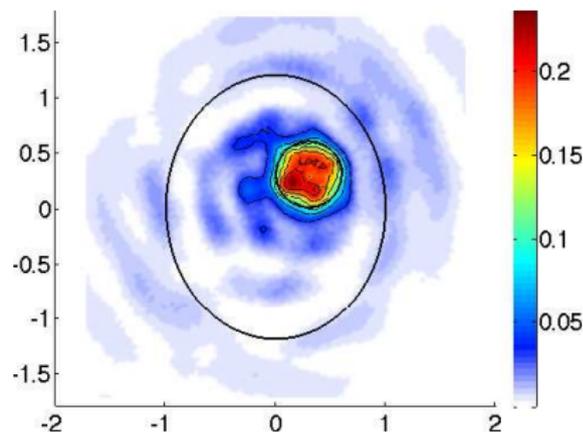


Figure: Localisation par descente en chaque point testé

- Diamètre défaut $\approx \frac{1}{3}$ de longueur d'onde
- **8633 problèmes de minimisation** (un par point testé)

Problème

Méthode trop peu performante

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - **Construction de méthodes rapides**
 - Extension des méthodes (conjecture)
- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts
- Conclusion

- Propriétés de $S\Delta_F$ (factorisation et coercivité) + [Kirsch, 2002] :
L'opérateur W , construit à partir des mesures

$$W := |S\Delta_F - (S\Delta_F)^*| + |S\Delta_F + (S\Delta_F)^*|, \quad (|L| := (L^*L)^{\frac{1}{2}})$$

a une factorisation de la forme

$$W = T_n^* B T_n,$$

avec B coercif, positif et auto-adjoint.

- Ainsi on obtient

$$\|\chi_\Omega T_n \Psi\| \approx \langle W \Psi, \Psi \rangle^{\frac{1}{2}} = \left\| W^{\frac{1}{2}} \Psi \right\|$$

- Caractérisation par minimisation d'un problème quadratique :
(W^\ddagger est un pseudo-inverse de $W^{\frac{1}{2}}$)

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(z) := \left\| W^\ddagger \overline{u_n(\cdot, z)} \right\|^{-2}$$

- Caractérisation de l'image d'opérateur par critère de Picard :
(λ_j / Ψ_j sont les valeurs/fonctions propres de W)

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathcal{S}_{\{n, n^*\}}(z) := \left(\sum_j \frac{|\langle \overline{u_n(\cdot, z)}, \Psi_j \rangle|^2}{\lambda_j} \right)^{-1}$$

Théorème (Reconstruction par approche de Minimisation) :

- $n(x), n^*(x) \in \mathbb{R}$
- $(n - n^*)(x) > 0$ ou < 0
- $\Gamma_e = \Gamma_m = S^{d-1}$
- $k \neq$ V.P.T. inhomogène

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(z) := \left\| W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)} \right\|^{-2}$$

(W^\dagger : pseudo-inverse de l'opérateur de mesures $W^{\frac{1}{2}}$)

Théorème (Reconstruction par une approche Spectrale) :

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on a aussi

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathcal{S}_{\{n, n^*\}}(z) := \left(\sum_j \frac{|\langle \overline{u_n(\cdot, z)}, \Psi_j \rangle|^2}{\lambda_j} \right)^{-1}$$

(λ_j / Ψ_j : valeurs/fonctions propres de W)

W et u_n sont construits à partir de l'indice donné n et des mesures $u_{n^*}^\infty$

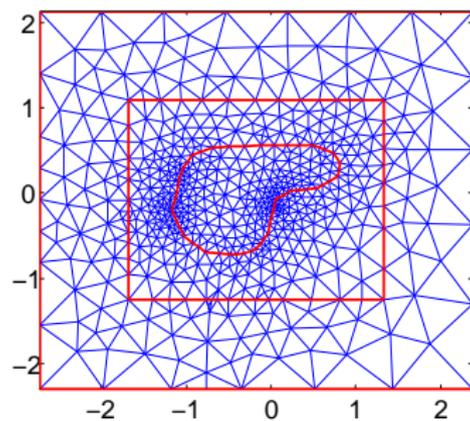


Figure: Indice donné

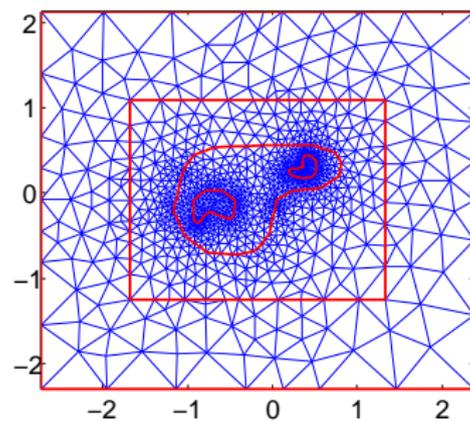


Figure: Indice exact

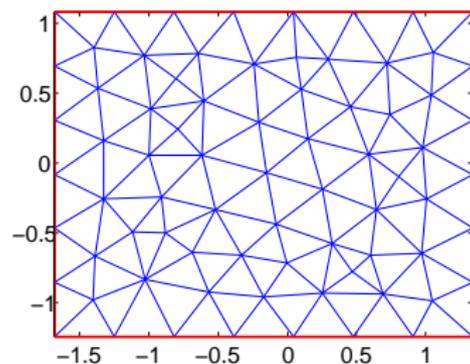


Figure: Zone de reconstruction

- Objet non-convexe de diamètre $2 \approx 2\lambda$
- Défauts non-convexes, non-connexes de diamètre $0.5 \approx \lambda/2$ et $0.3 \approx \lambda/3$
- Bruit uniforme en % ajouté aux mesures ($u_{n^*}^\infty$)

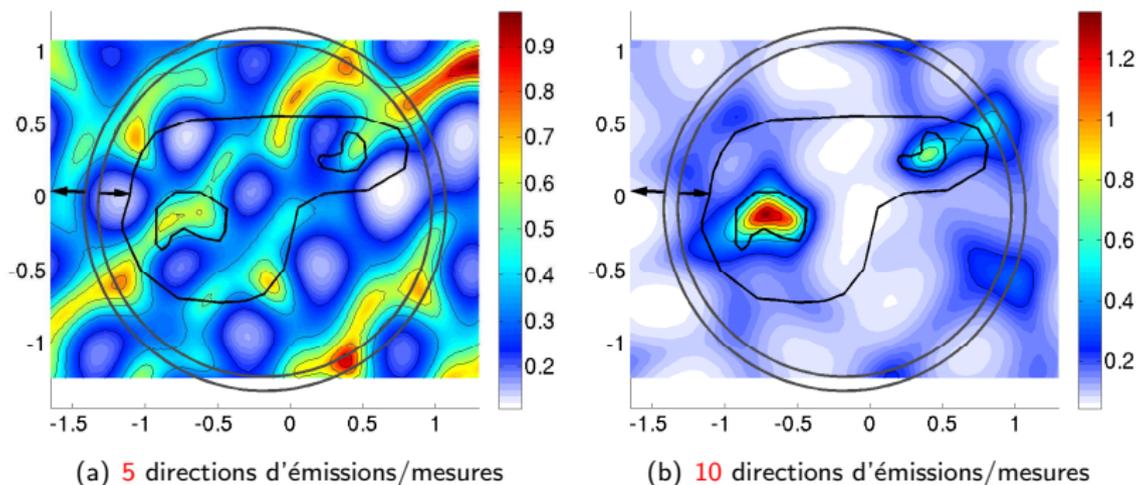


Figure: Sensibilité au nombre de directions d'émissions/mesures

- Directions d'émissions sur $[0, 2\pi]$, directions de mesures sur $[0, 2\pi]$
- Bruit : 2%
- n dans D dans $[1.33, 1.41]$, n^* dans Ω dans $[1.95, 2.01]$

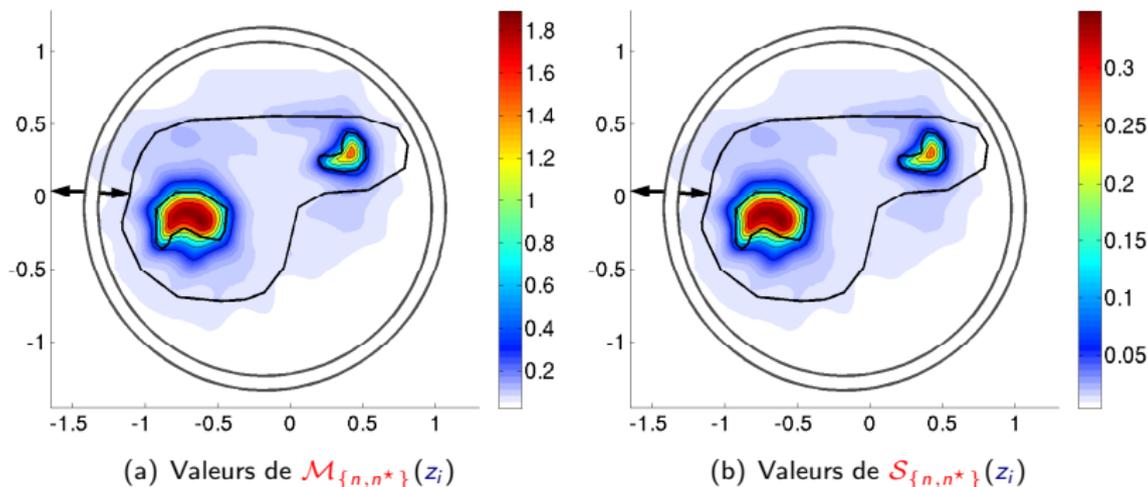


Figure: Faible bruitage des mesures

- 35 directions d'émissions sur $[0, 2\pi]$, 35 directions de mesures sur $[0, 2\pi]$
- Bruit : 3%
- n dans \mathbb{D} dans $[1.33, 1.41]$, n^* dans Ω dans $[1.95, 2.01]$

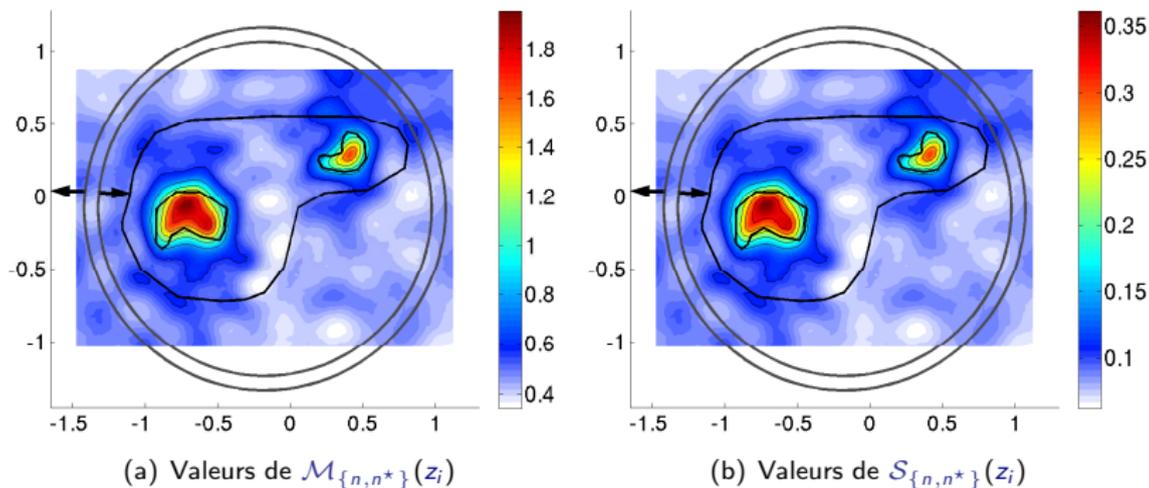


Figure: Fort bruitage des mesures

- 35 directions d'émissions sur $[0, 2\pi]$, 35 directions de mesures sur $[0, 2\pi]$
- Bruit : 30%
- n dans \mathbf{D} dans $[1.33, 1.41]$, n^* dans $\mathbf{\Omega}$ dans $[1.95, 2.01]$

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)
- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts
- Conclusion

Limitations

L'opérateur W permet de localiser les défauts mais par construction il faut

- $n(x), n^*(x) \in \mathbb{R}$
- $\Gamma_e = \Gamma_m = S^{d-1}$

Propriétés de W utilisées :

- $W = T^* B T$
- B coercif, positif et auto-adjoint

Autre candidat moins restrictif : $|\Delta_F|$

- $|\Delta_F| = (\Delta_F^* \Delta_F)^{\frac{1}{2}}$: positif auto-adjoint
- $|\Delta_F|^2 = (\Delta_F^* \Delta_F) = T^* \boxed{A^* (V_n^\infty)^* V_n^\infty A} T$: symétrique

Il manque

- $|\Delta_F| = T^* C T$ avec C coercif

Avantages

L'opérateur $|\Delta_F|$ est parfaitement défini avec

- $n(x), n^*(x) \in \mathbb{C}$
- $\Gamma_e \neq \Gamma_m$

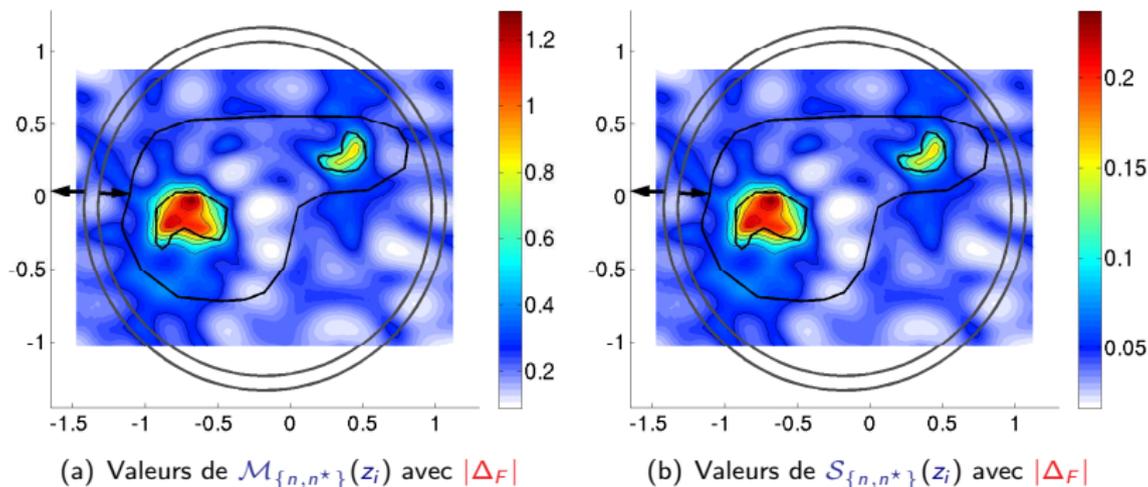


Figure: Fort bruitage des mesures

- 35 directions d'émissions sur $[0, 2\pi]$, 35 directions de mesures sur $[0, 2\pi]$
- Bruit : 30%
- n dans \mathbb{D} dans $[1.33, 1.41]$, n^* dans Ω dans $[1.95, 2.01]$

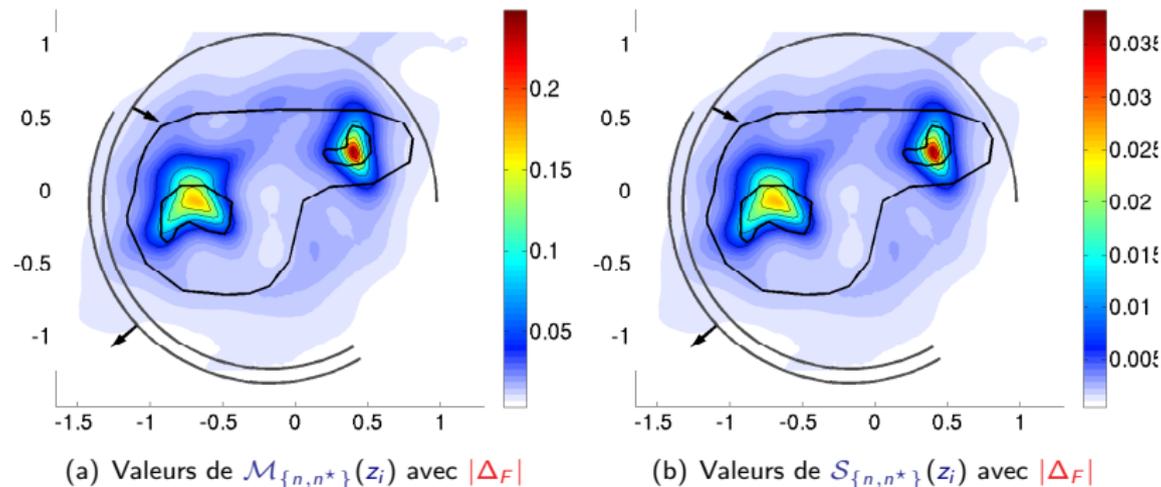


Figure: Emissions **distinctes** des réceptions et indices **complexes**

- 35 directions d'émissions sur $[0, 1.67\pi]$
- 40 directions de mesures sur $[0.83\pi, 1.67\pi]$
- Bruit : 2%
- n dans \mathbf{D} dans $[1.53, 1.63] + [0.0702, 0.121]i$
- n^* dans $\mathbf{\Omega}$ dans $[2.26, 2.33] + [0.483, 0.521]i$

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)
- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts
- Conclusion

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)

- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts

- Conclusion

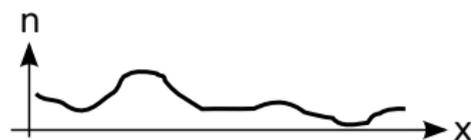
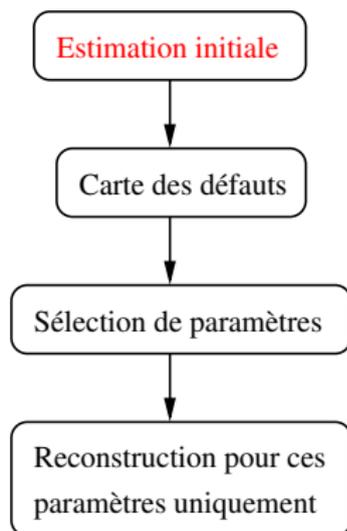


Figure: Procédure pour l'identification de défauts

- Méthode de Gauss-Newton avec régularisation par variation totale :

$$n_{p+1} = n_p + d_{n_p}$$

$$d_{n_p} := \operatorname{argmin}_{dn \in L^\infty(D)} \left\| \mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p)dn - u_{n^*}^\infty \right\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \left\| \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta} \right\|_{L^1(D)}$$

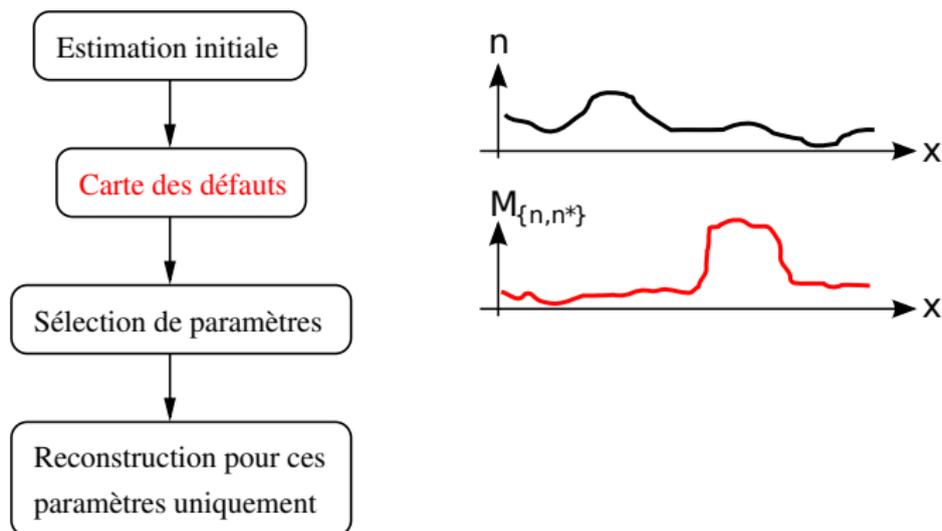


Figure: Procédure pour l'identification de défauts

- Méthode de Gauss-Newton avec régularisation par variation totale :

$$n_{p+1} = n_p + d_{n_p}$$

$$d_{n_p} := \operatorname{argmin}_{dn \in L^\infty(D)} \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p)dn - u_{n^*}^\infty\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \left\| \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta} \right\|_{L^1(D)}$$

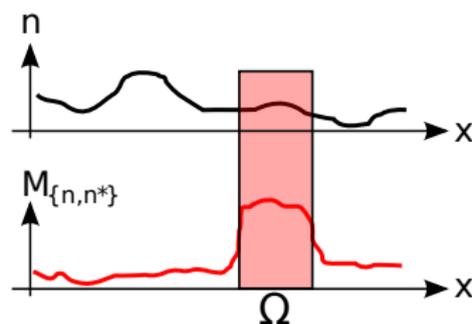
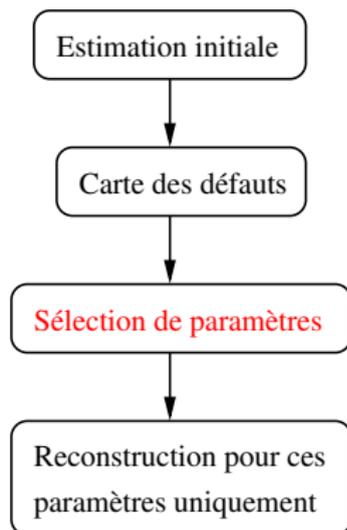


Figure: Procédure pour l'identification de défauts

- Méthode de Gauss-Newton avec régularisation par variation totale :

$$n_{p+1} = n_p + d_{n_p}$$

$$d_{n_p} := \operatorname{argmin}_{dn \in L^\infty(D)} \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p)dn - u_{n^*}^\infty\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \left\| \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta} \right\|_{L^1(D)}$$

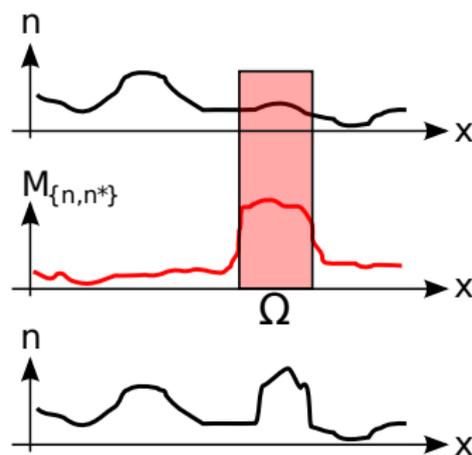
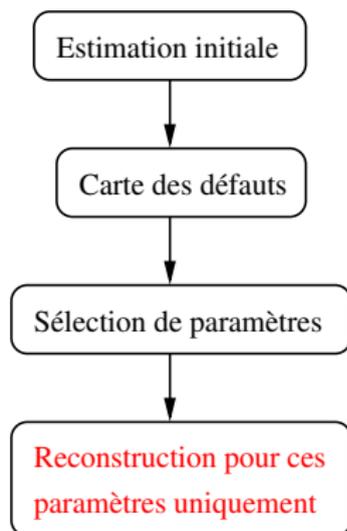
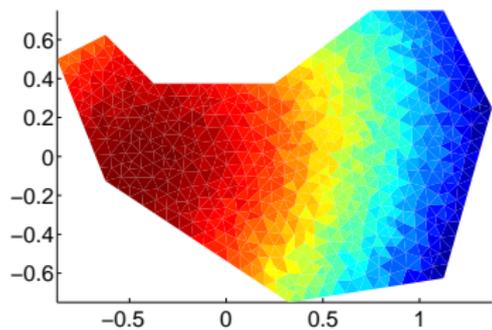


Figure: Procédure pour l'identification de défauts

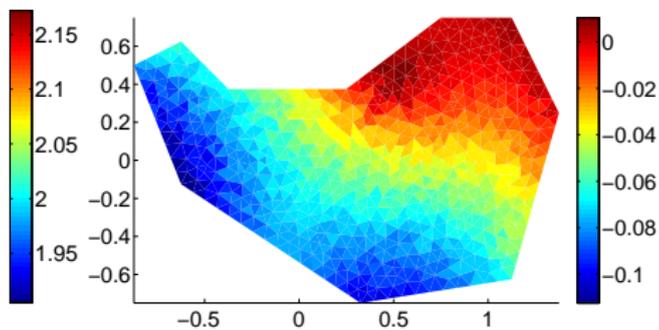
- Méthode de Gauss-Newton avec régularisation par variation totale :

$$n_{p+1} = n_p + d_{n_p}$$

$$d_{n_p} := \operatorname{argmin}_{dn \in L^\infty(D)} \|\mathcal{F}(n_p) + D\mathcal{F}(n_p)dn - u_{n^*}^\infty\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \left\| \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta} \right\|_{L^1(D)}$$

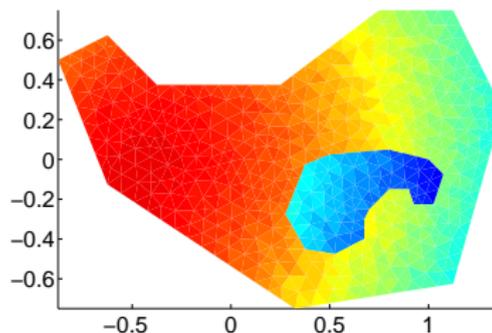


(a) Partie réelle de $n(x)$

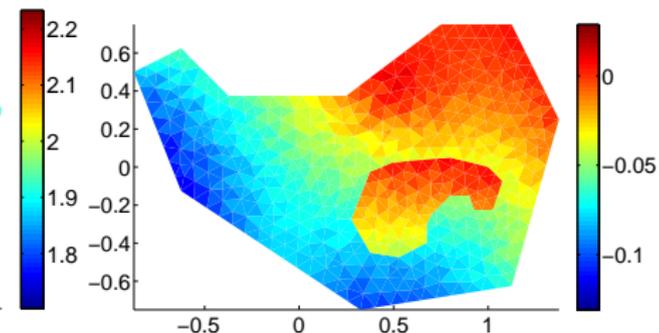


(b) Partie imaginaire de $n(x)$

Figure: Valeurs de l'indice avant défauts : estimation initiale n



(a) Partie réelle de $n^*(x)$



(b) Partie imaginaire de $n^*(x)$

Figure: Valeurs de l'indice avec défauts recherché : n^*

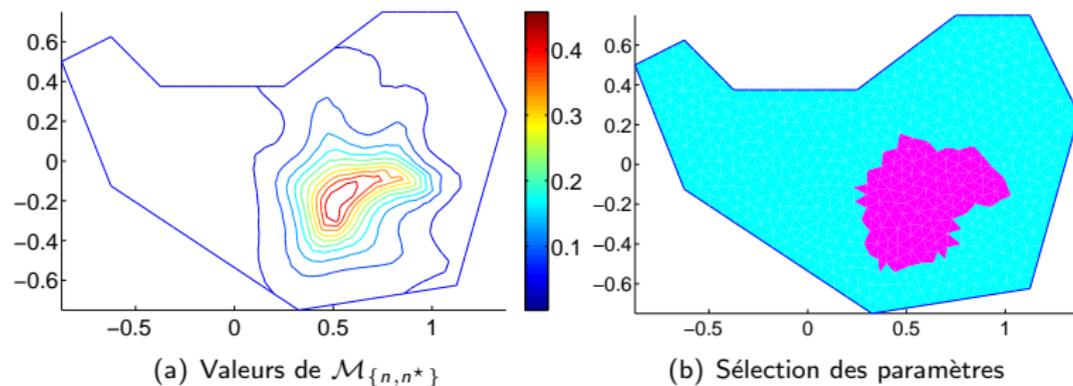


Figure: Localisation des défauts en seuillant à 25 % du maximum de $\mathcal{M}_{\{n,n^*\}}$

- Sélection de 181 triangles sur 1106

Reconstruction of the perturbed index

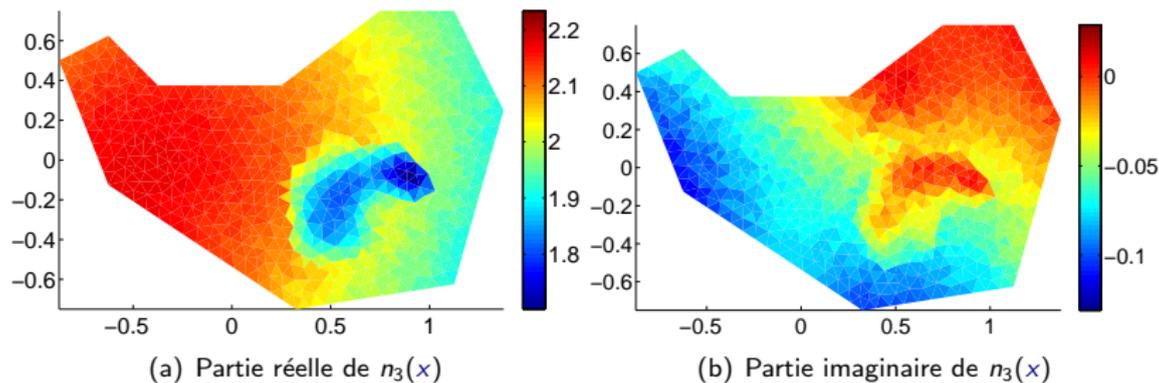
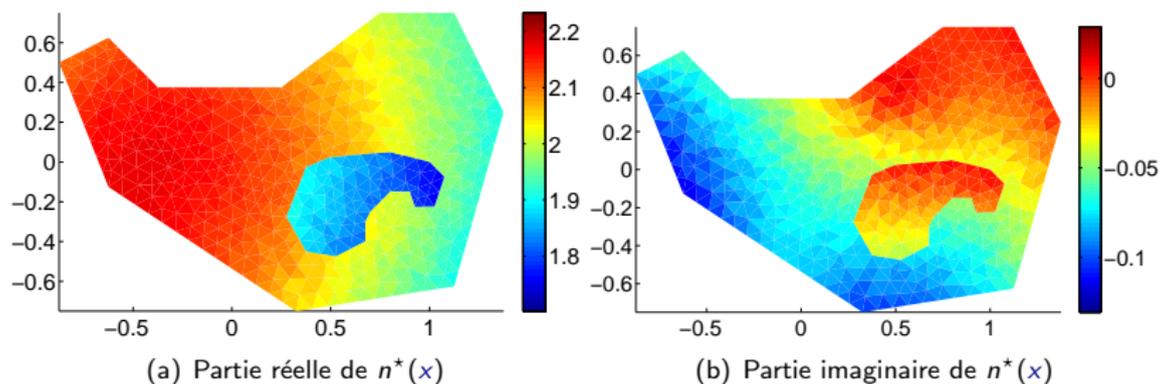


Figure: Identification de défauts avec 2% de bruit ajouté aux mesures



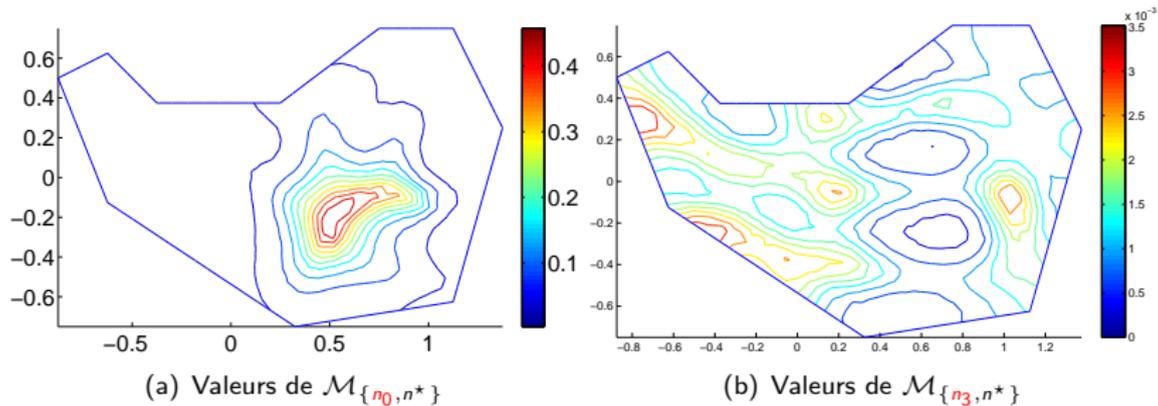


Figure: Validation a posteriori de l'identification de défauts

- Maximum de $\mathcal{M}_{\{n_0, n^*\}}(z)$ (avant) : 0.4
- Maximum de $\mathcal{M}_{\{n_3, n^*\}}(z)$ (après) : 0.003

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)

- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - **Méthode de raffinement adaptatif**
 - Reconstruction par minimisation des défauts

- Conclusion

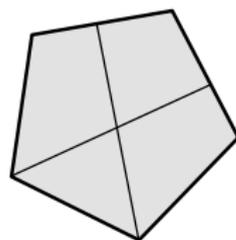
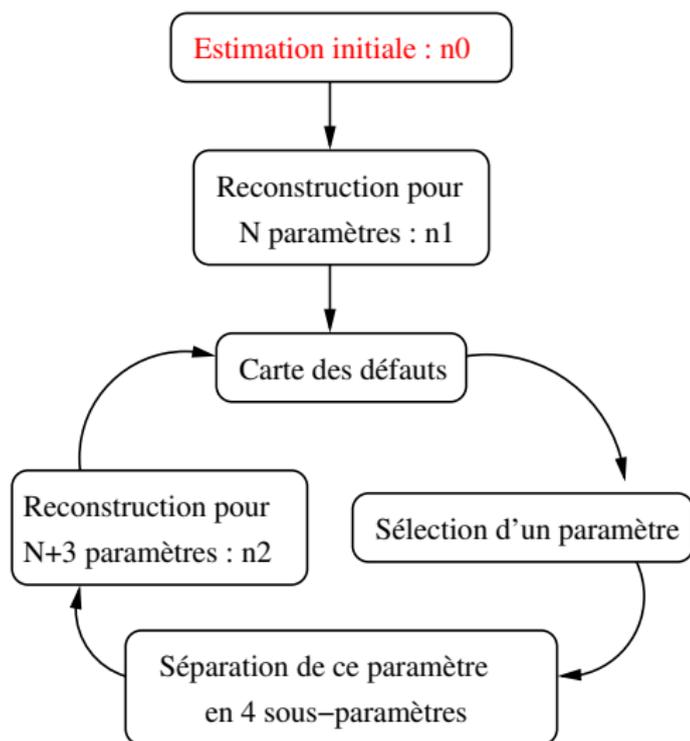


Figure: Procédure pour le raffinement adaptatif de la géométrie

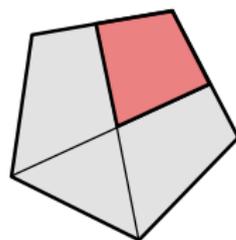
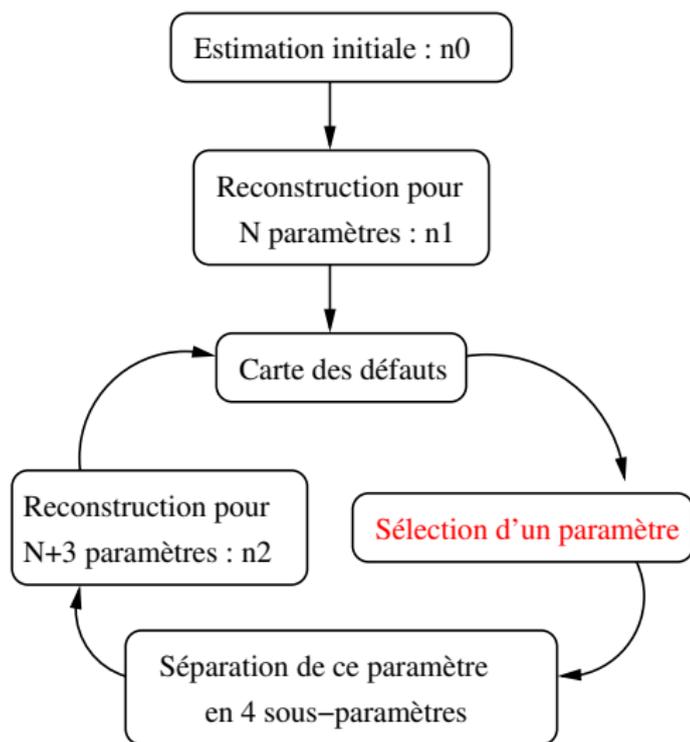


Figure: Procédure pour le raffinement adaptatif de la géométrie

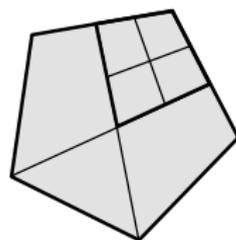
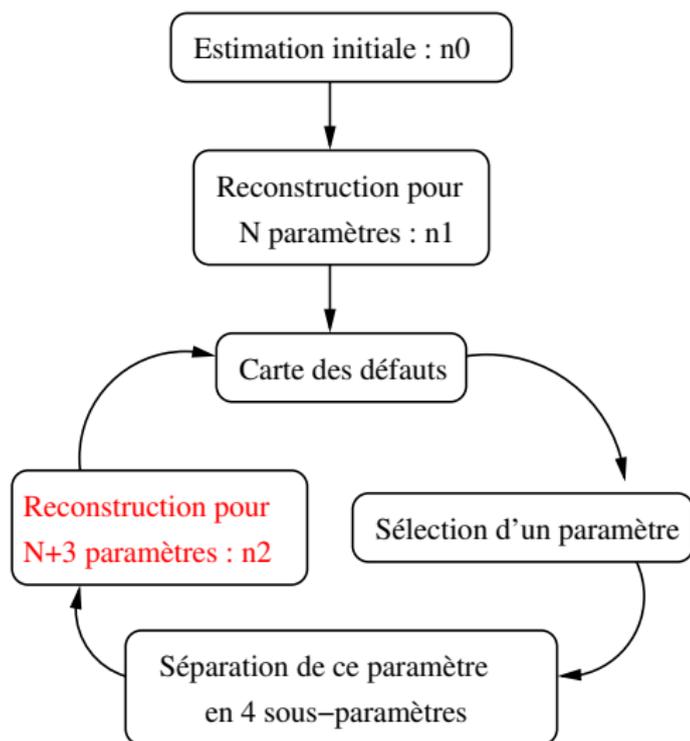


Figure: Procédure pour le raffinement adaptatif de la géométrie

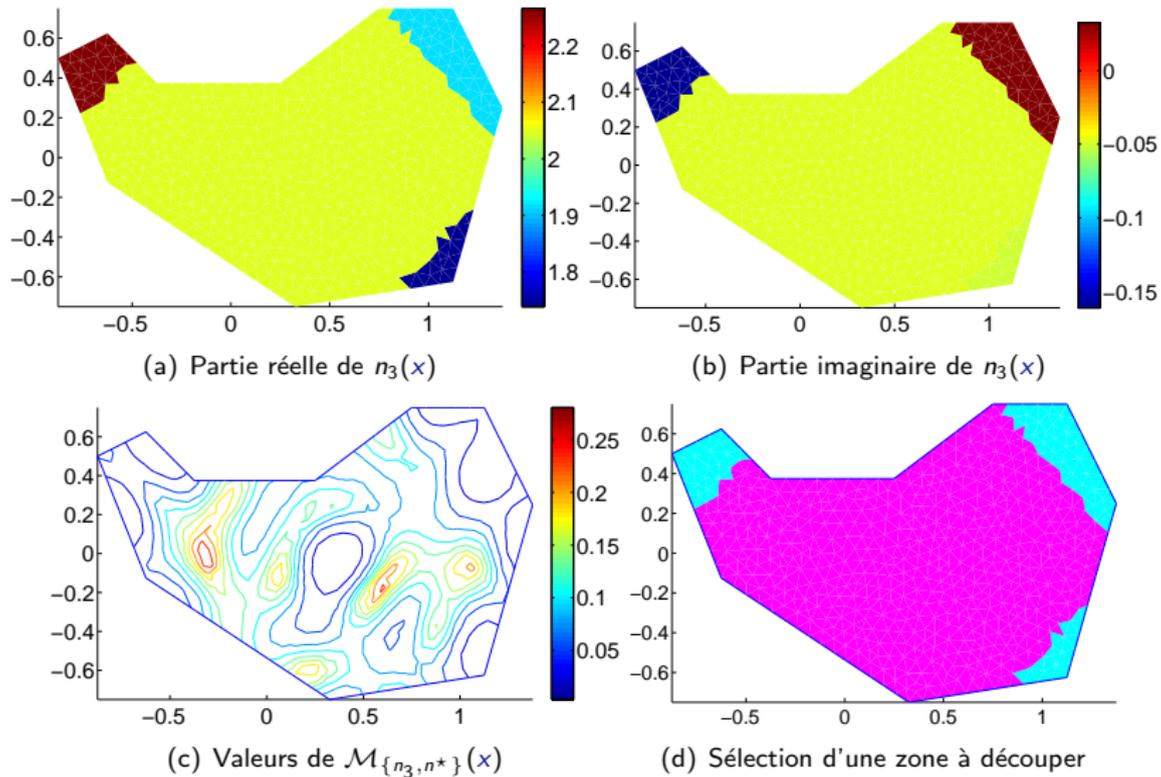


Figure: Raffinement adaptatif : cycle 1

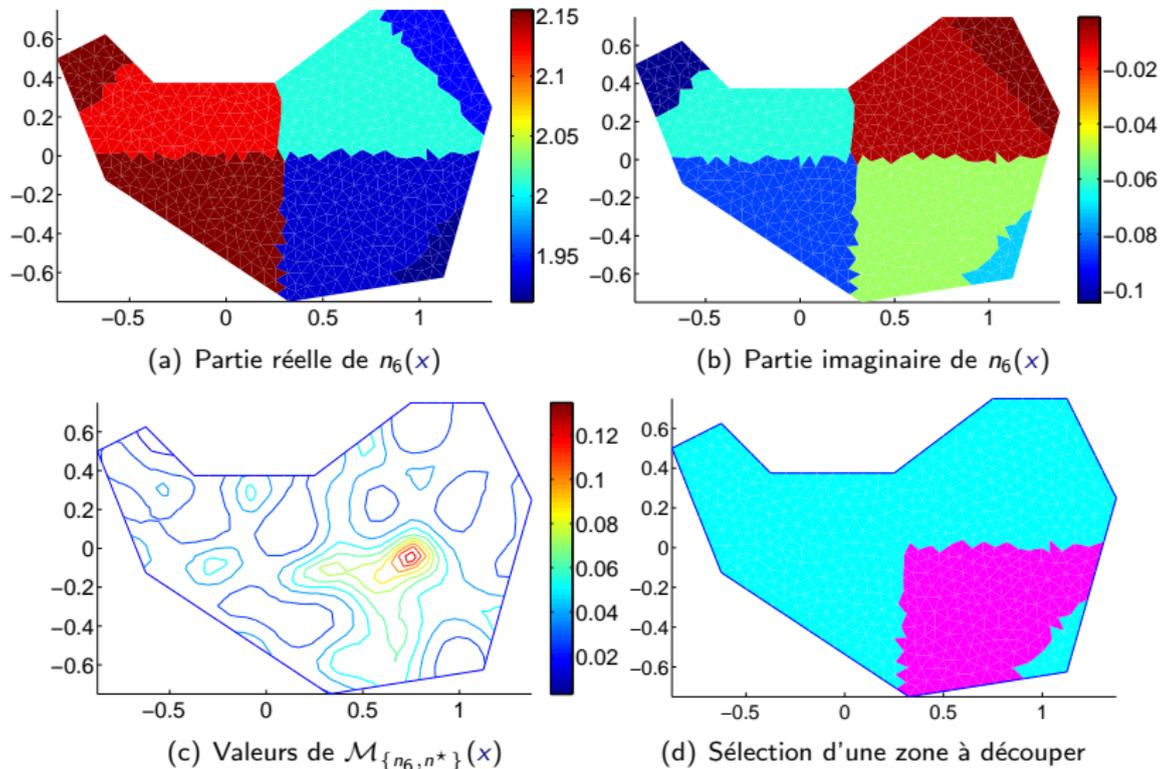
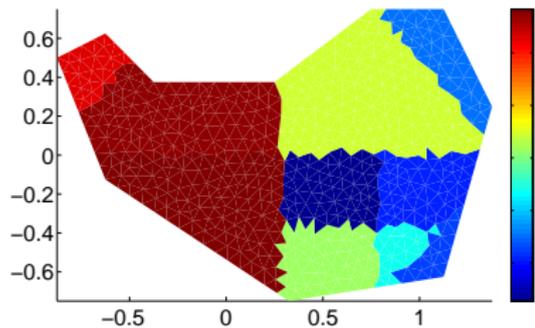
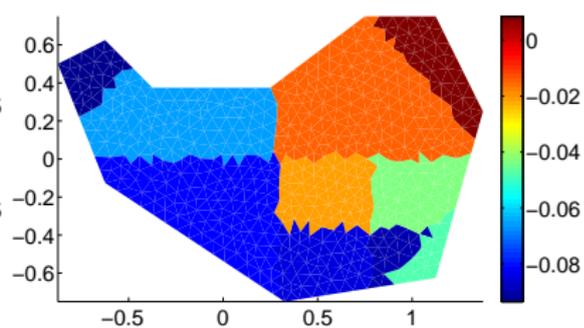


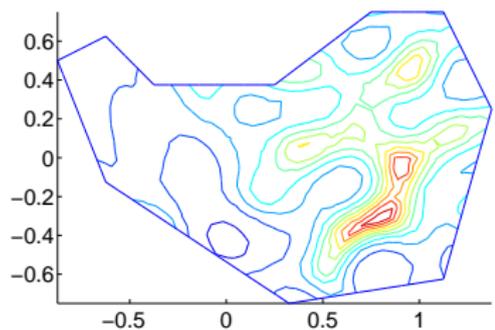
Figure: Raffinement adaptatif : cycle 2



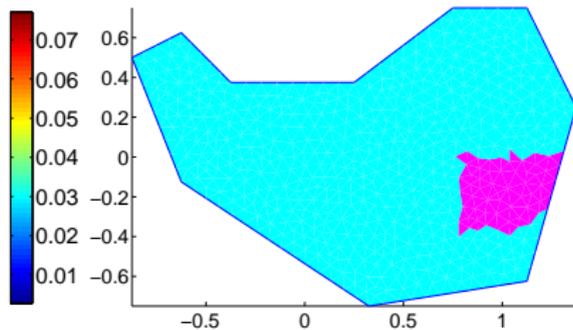
(a) Partie réelle de $n_8(x)$



(b) Partie imaginaire de $n_8(x)$

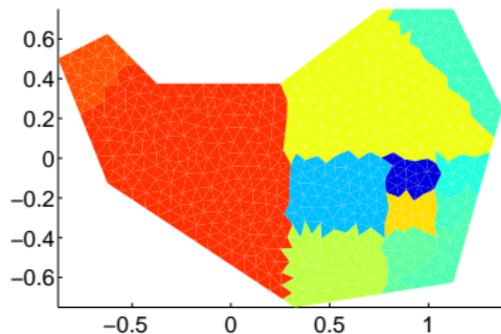


(c) Valeurs de $\mathcal{M}_{\{n_8, n^*\}}(x)$

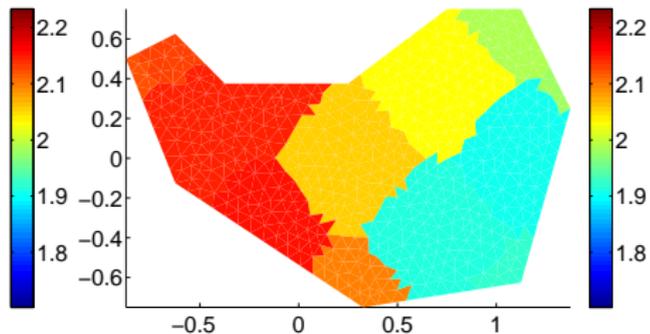


(d) Sélection d'une zone à découper

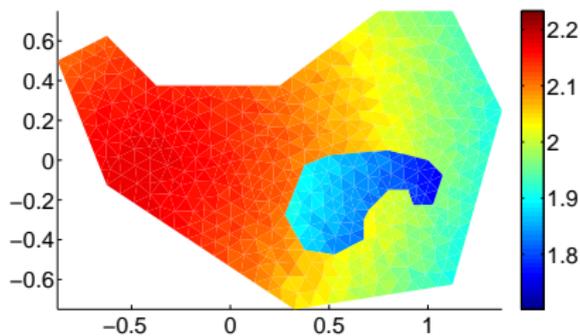
Figure: Raffinement adaptatif : cycle 3



(a) Partie réelle de $n_{10}(x)$

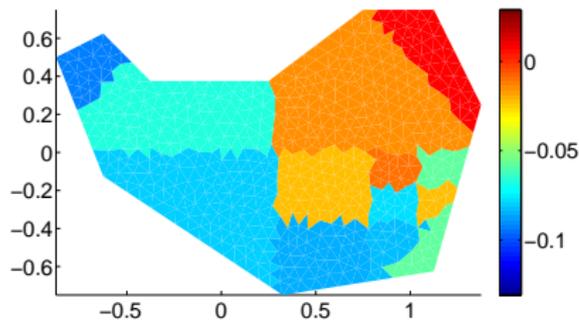


(b) Partie réelle de la reconstruction avec 13 paramètres répartis uniformément

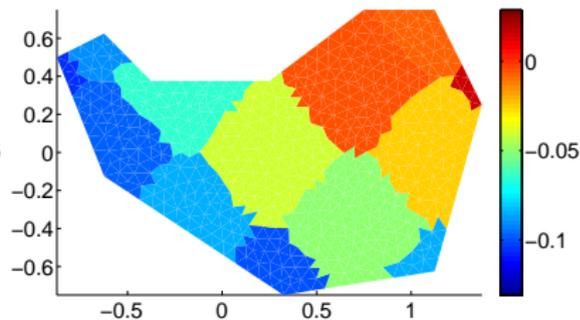


(c) Partie réelle de $n^*(x)$

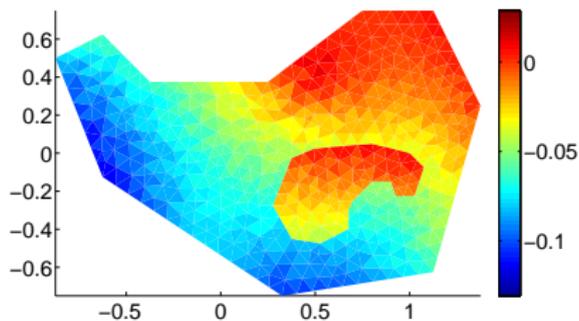
Figure: Comparaison du raffinement itératif avec l'indice recherché et avec une reconstruction non-adaptative sur le même nombre de zones



(a) Partie imaginaire de $n_{10}(x)$



(b) Partie imaginaire de la reconstruction avec 13 paramètres répartis uniformément



(c) Partie imaginaire de $n^*(x)$

Figure: Comparaison du raffinement itératif avec l'indice recherché et avec une reconstruction non-adaptative sur le même nombre de zones

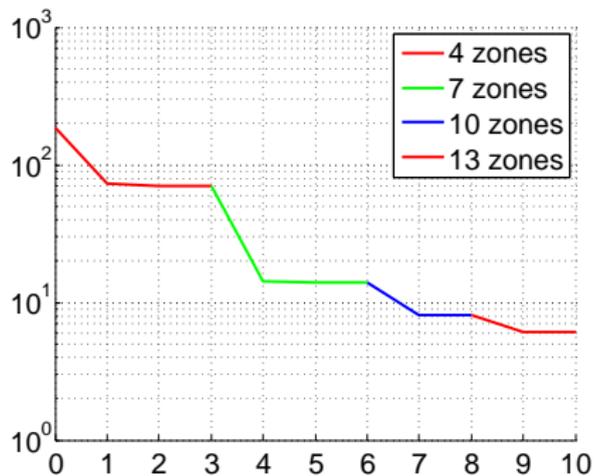


Figure: Valeurs de la fonction coût après chaque itération de la méthode de Gauss-Newton avec raffinements successifs

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)
- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts
- Conclusion

- Par le théorème de localisation on a

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(z) := \left\| W^\dagger \overline{u_n(\cdot, z)} \right\|^{-2}$$

Théorème (Unicité de la solution) :

- $n(x), n^*(x) \in \mathbb{R}$
- $(n - n^*)(x) > 0$ ou < 0
- $\Gamma_e = \Gamma_m = S^{d-1}$
- $k \neq V.P.T.$ inhomogène

Soit $\Omega := \text{support}(n^* - n) \subset D$.

Si $\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(x) = 0, \quad \forall x \in D,$

alors on a l'alternative suivante :

- soit $\Omega = \emptyset$ et donc $n(x) = n^*(x), \quad \forall x \in D,$
- soit k est une valeur propre de transmission inhomogène pour la paire d'indices (n, n^*) dans Ω .

$$J_{\mathcal{M}}(n) := \|\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}\|_X^2$$

- $J(n) := \|\mathcal{F}(n)(\cdot, \cdot) - u_{n^*}^\infty(\cdot, \cdot)\|_{L^2(\Gamma_e) \times L^2(\Gamma_m)}^2$: (simulation - mesures)
- $J_{\mathcal{M}}(n) := \|\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(\cdot)\|_{L^2(D)}^2$: somme des défauts

Avantage

On peut mesurer la somme des défauts sur une sous-partie de D :
reconstruction exacte sur un domaine au choix (**parallélisation**)

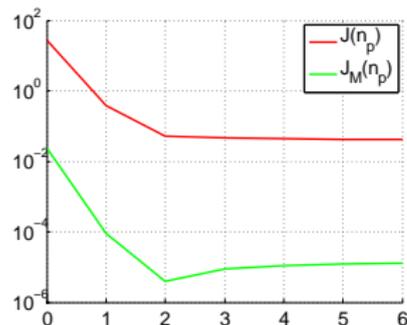
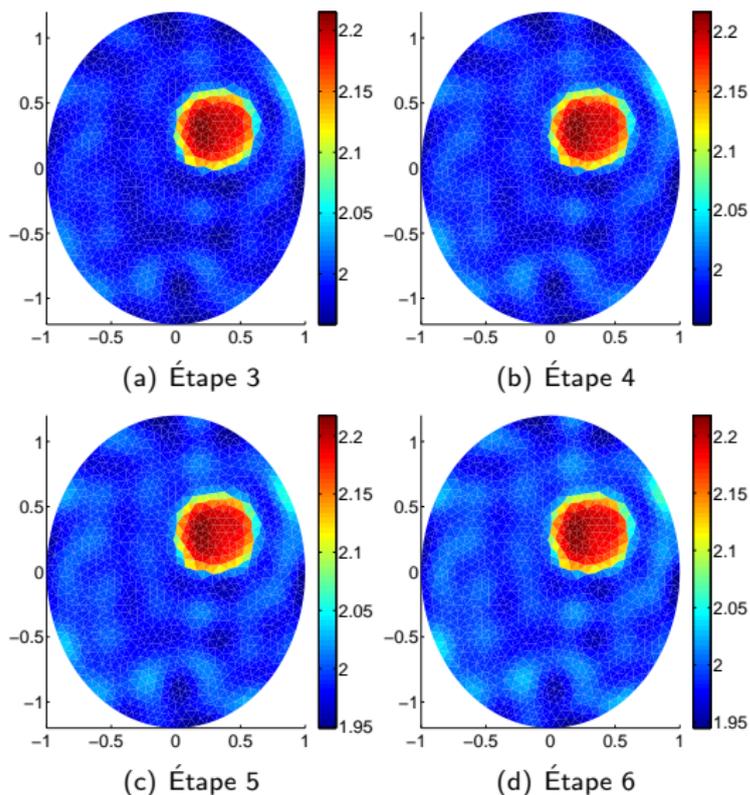


Figure: Reconstruction par minimisation de J : valeurs de J et J_M en fonction de l'étape p



- $n_{p+1} = n_p + d_{n_p}$

- $d_{n_p} :=$

$$\operatorname{argmin}_{dn \in L^\infty(D)} \left\| \mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}} + D\mathcal{M}_{\{\cdot, n^*\}}(n_p) dn \right\|_{L^2(D)}^2 + \lambda \left\| \sqrt{|\nabla dn|^2 + \beta} \right\|_{L^1(D)}$$

- $\mathcal{M}_{\{n_p, n^*\}}(x) := \left\| W^\dagger \overline{u_{n_p}(\cdot, x)} \right\|^{-2}$

- $(D\mathcal{M}_{\{\cdot, n^*\}}(n) dn)(x) =$
 $-2 \left(\mathcal{M}_{\{n, n^*\}}(x) \right)^2 \operatorname{Re} \left\langle W^\dagger \overline{u_n(\cdot, x)}, W^\dagger (\overline{\partial_n u_n} - X_0 W^\dagger \overline{u_n(\cdot, x)}) \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)},$

où W^\dagger est un **pseudo-inverse de $|W|^{\frac{1}{2}}$** et X_0 est défini comme la solution de

$$\begin{cases} X_\pm |S_n \Delta_F \pm S_n \Delta_F^*| + |S_n \Delta_F \pm S_n \Delta_F^*| X_\pm = \\ \quad (S_n \Delta_F \pm S_n \Delta_F^*) (\partial_n S_n \Delta_F(n) dn \pm \partial_n S_n \Delta_F^*(n) dn) \\ \quad + (\partial_n S_n \Delta_F(n) dn \pm \partial_n S_n \Delta_F^*(n) dn) (S_n \Delta_F \pm S_n \Delta_F^*), \\ W^{\frac{1}{2}} X_0 + X_0 W^{\frac{1}{2}} = X_+ + X_-, \end{cases}$$

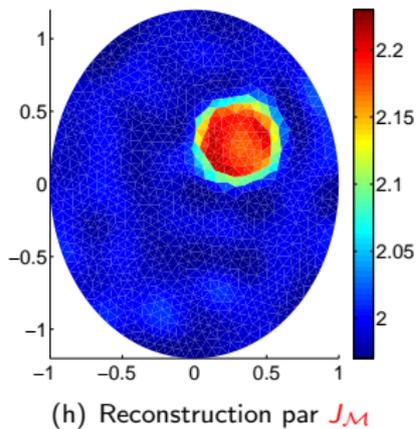
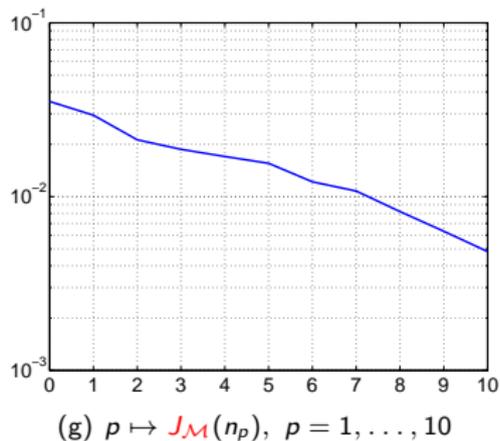
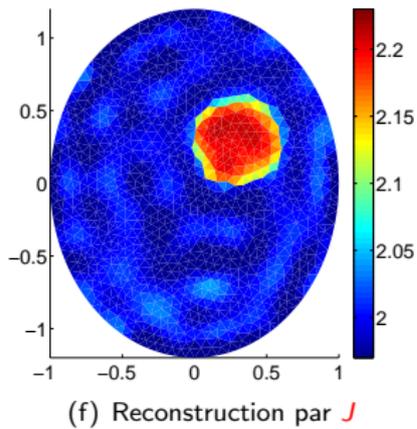
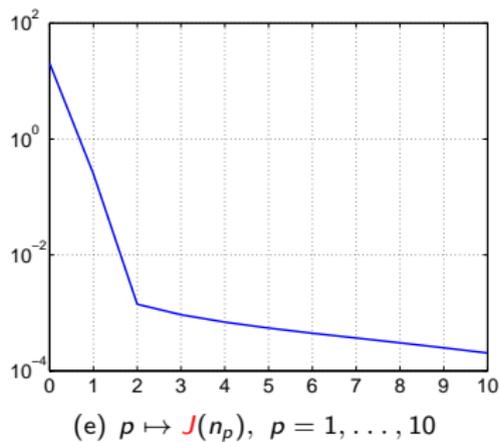


Figure: 12 directions d'émissions/mesures sur $[0, 2\pi]$, 0% de bruit
2035 paramètres réels

Reconstruction non-triviale par minimisation de la somme des défauts

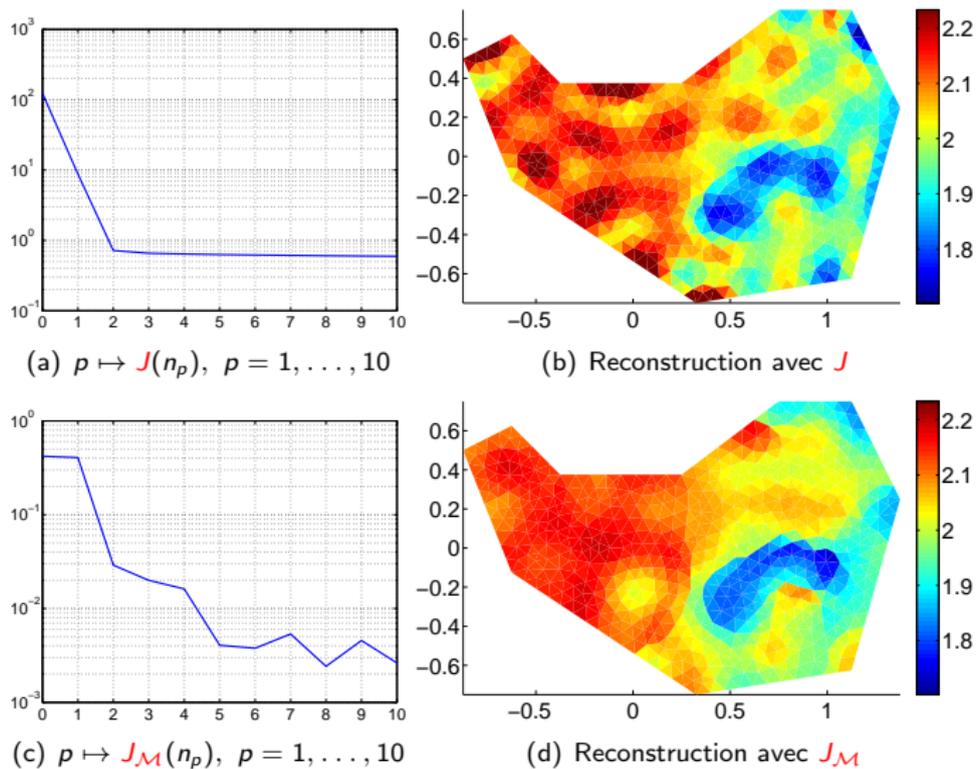


Figure: 12 directions d'émissions/mesures sur $[0, 2\pi]$, 2% de bruit
1106 paramètres complexes

- Localisation de défauts
 - Caractérisation pratique de Ω
 - Construction de méthodes rapides
 - Extension des méthodes (conjecture)
- Reconstruction d'indice
 - Méthode d'identification de défauts
 - Méthode de raffinement adaptatif
 - Reconstruction par minimisation des défauts
- Conclusion

Conclusions

- Extension du principe de la méthode de “Factorization” à la reconstruction de forme de **défauts en champ lointain**
- Développement de **méthodes rapides**
- **Validation numérique** de ces méthodes
- Validation numérique d'une **possibilité d'extension** de ces méthodes

- Présentation d'une méthode d'**identification complète de défauts**
- Présentation d'une méthode de **raffinement adaptatif** de la reconstruction d'indice
- Présentation d'un **nouveau terme de fidélité** pour la reconstruction d'indice

Perspectives

- **Etendre le cadre d'application** des méthodes de localisation de défauts
- Compléter avec la reconstruction des fonctions tests à partir de mesures
→ **Détection de mouvement**
- Transposer les problèmes au **cadre temporel** ou au cadre **multi-fréquentiel** pour mieux coller à la réalité des systèmes de mesures

- Approfondir les méthodes de **reconstruction d'indice couplées à la localisation des défauts**
- Etudier le problème de **transmission double** avec géométrie variable
- Mettre en place une **reconstruction locale exacte** de l'indice
- Reprendre l'étude de ce nouveau terme de fidélité avec une **autre mesure**

Merci pour votre attention