

Reconstruction de la forme de défauts dans un milieu inhomogène par mesures acoustiques en champ lointain

Yann Grisel^{1,2}, Pierre Mazet^{1,2}, Vincent Mouysset¹, Jean-Pierre Raymond²

¹ ONERA - Toulouse

² Université Toulouse 3, Paul Sabatier



retour sur innovation

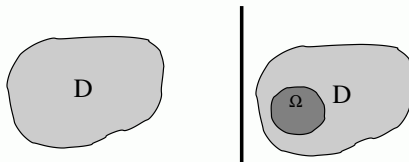


Fig.: Objet dans son état initial (à gauche) et après apparition d'un défaut (à droite).

Problème

- Récupérer des informations sur d'éventuels défauts dans une structure connue à partir de mesures à grande distance.

Objectif

- Etablir une méthode rapide de reconstruction de la localisation et de la forme des défauts à partir des mesures.

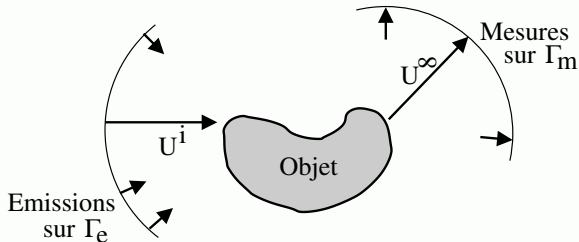


Fig.: La diffraction acoustique : champs incidents et champ lointain.

- Système de Helmholtz dans un milieu inhomogène

$$\begin{cases} \Delta u_n + k^2 n(x) u_n = 0, & x \in \mathbb{R}^d, \\ \Delta u^i + k^2 u^i = 0, \\ u_n = u^s + u^i, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} (\partial_r u^s - i k u^s) = 0. \end{cases}$$

$$\text{support}(n - 1) = D$$

- Solution fondamentale

$$\begin{cases} (\Delta + k^2 n(x)) \Phi_n(z, x) = -\delta(z, x), \\ \text{Condition de radiation de Sommerfeld} \end{cases}$$

- Résolvante :

$$V_n h(x) := \left\langle h, \overline{\Phi_n(\cdot, x)} \right\rangle_{L^2(D)}.$$

- Comportement asymptotique (champ lointain)

$$u_n(x) = u^i(x) + \gamma \frac{e^{ik|x|}}{|x|^{\frac{d-1}{2}}} u_n^\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + o\left(|x|^{-\frac{d-1}{2}}\right),$$

- Ondes planes et fonctions de Herglotz

$$u^i(\theta, x) = e^{ik\theta \cdot x}, \quad \theta \in \Gamma_e, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

$$Hg(x) = \left\langle g, \overline{u^i(\cdot, x)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_m)}.$$

- Opérateur de mesures (de champ lointain)

$$F_n g(\hat{x}) = \left\langle g, \overline{u_n^\infty(\hat{x}, \cdot)} \right\rangle_{L^2(\Gamma_e)}, \quad \hat{x} \in \Gamma_m.$$

Localisation de défauts

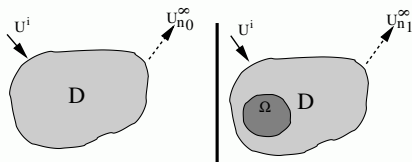


Fig.: Objet et mesures avant (à gauche) et après (à droite) apparition de défauts.

- Indice initial : n_0
- Indice perturbé : n_1
- Opérateur de mesures : $\Delta_F = F_{n_1} - F_{n_0}$

Objectif : reconstruire la forme du domaine $\Omega := \text{support}(n_1 - n_0)$ à partir des mesures regroupées dans l'opérateur Δ_F

Théorème (Reconstruction de la forme des défauts par le critère de Picard)

Hormis pour certaines valeurs de k , avec des indices n_0 et n_1 à *valeurs réelles* et des directions d'émission/réception couvrant *toute la sphère* unité, alors $\forall z \in \mathbb{R}^d$ on a

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathfrak{P}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left(\sum_j \frac{|\langle u_{n_0}(\cdot, z), \Psi_j \rangle|^2}{\lambda_j} \right)^{-1},$$

où λ_j/Ψ_j sont les valeurs/fonctions propres d'un opérateur W

Théorème (Reconstruction de la forme des défauts par minimisation)

Dans les mêmes conditions que ci-dessus, on a aussi

$$z \in \Omega \iff 0 < \mathfrak{M}_{\{n_0, n_1\}}(z) := \left\| W^\dagger \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \right\|^{-2},$$

où W^\dagger est un pseudo-inverse de $W^{\frac{1}{2}}$.

1 - Caractérisation par les sources ponctuelles

- ① Si $z \in \Omega$, avec f_z un lissage de $\Phi_{n_0}(z, x)$ autour de z , alors

$$\Phi_{n_0}^\infty(z, \hat{x}) = f_z^\infty = V_{n_0}^\infty [\chi_\Omega(\Delta + k^2 n_0) f_z].$$

Si $z \notin \Omega$, $V_{n_0} \chi_\Omega u^i$ est continue hors de Ω et $\Phi_{n_0}(z, \cdot)$ est singulière.

Conclusion :

$$z \in \Omega \iff \Phi_{n_0}^\infty(z, \cdot) \in \mathcal{R}(V_{n_0}^\infty \chi_\Omega).$$

- ② Par l'asymptotique de l'équation de Lippmann-Schwinger

$$(V_n g)^\infty = V_1^\infty (g + k^2(n-1)V_n g),$$

on a la relation de réciprocité mixte

$$\Phi_n^\infty(z, \hat{x}) = \gamma u_n(-\hat{x}, z).$$

- ③ Ainsi, avec l'opérateur $C : L^2(D) \rightarrow L^2(\Gamma_e)$, défini par

$$Cf(\hat{x}) = \langle f, u_{n_0}(\hat{x}, \cdot) \rangle_{L^2(D)},$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ on a

$$z \in \Omega \iff \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(C \chi_\Omega).$$

2 - Caractérisation de l'image d'un opérateur [Nachman, 2007]

- 1 Pour un opérateur linéaire continu L , si

$$\exists c > 0 / \forall \Psi, |\langle \Psi, \varphi \rangle| \leq c \|L^* \Psi\|,$$

alors

$$j_\varphi(L^* \Psi) = \langle \Psi, \varphi \rangle,$$

se prolonge par Hahn-Banach à $\overline{\mathcal{R}(L^*)}$ puis par 0 à tout l'espace.

- 2 Par identification de Riesz

$$j_\varphi(g) = \langle g, f_\varphi \rangle,$$

et alors pour tout Ψ

$$\langle \Psi, \varphi \rangle = j_\varphi(L^* \Psi) = \langle L^* \Psi, f_\varphi \rangle = \langle \Psi, L f_\varphi \rangle.$$

- 3 Ainsi, pour un opérateur linéaire continu L on a

$$\varphi \in \mathcal{R}(L) \iff \exists c > 0 / \forall \Psi, |\langle \Psi, \varphi \rangle| \leq c \|L^* \Psi\|.$$

3 - Factorisation de l'opérateur de mesures

- 1 L'opérateur Δ_F a une factorisation de la forme

$$\Delta_F = V_{n_0}^\infty AC^*.$$

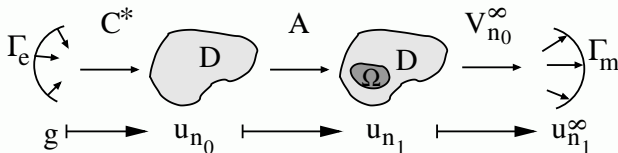


Fig.: Éléments de la factorisation de l'opérateur de mesures.

- 2 Avec l'opérateur de scattering $S = (Id + 2ik |\gamma|^2 F_{n_0})$, on a

$$V_{n_0}^\infty = SC.$$

- 3 Ainsi, le produit d'opérateurs $S\Delta_F$ se factorise sous la forme

$$S\Delta_F = CAC^*.$$

4 - Caractérisation par les mesures

- 1 L'opérateur A est un isomorphisme de $L^2(\Omega)$ et **coercif**.
- 2 Par [Kirsch, 2002], l'opérateur W , construit **à partir des mesures** et défini par

$$W = |S\Delta_F - (S\Delta_F)^*| + |S\Delta_F + (S\Delta_F)^*|,$$

a une factorisation de la forme

$$W = CBC^*,$$

avec B **coercif, positif et auto-adjoint**.

- 3 Ainsi on obtient

L'opérateur W est positif, auto-adjoint et la forme positivement homogène $\langle W\Psi, \Psi \rangle^{\frac{1}{2}}$ est comparable à $\|\chi_\Omega C^* \Psi\|$.

5 - Conclusion

$$z \in \Omega \iff \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(C\chi_\Omega) \quad (\text{étape 1})$$

$$\iff \forall \Psi, \left| \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle \right| \leq c \|C^* \Psi\| \quad (\text{étape 2})$$

$$\iff \forall \Psi, \left| \langle \Psi, \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \rangle \right| \leq c \langle W\Psi, \Psi \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (\text{étapes 3\&4})$$

► Caractérisation par $\mathfrak{M}_{\{n_0, n_1\}}(z) > 0$

$$\iff \overline{u_{n_0}(\cdot, z)} \in \mathcal{R}(W^{\frac{1}{2}})$$

► Caractérisation par $\mathfrak{P}_{\{n_0, n_1\}}(z) > 0$

Applications numériques

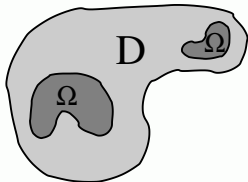


Fig.: Géométrie de l'objet et des défauts

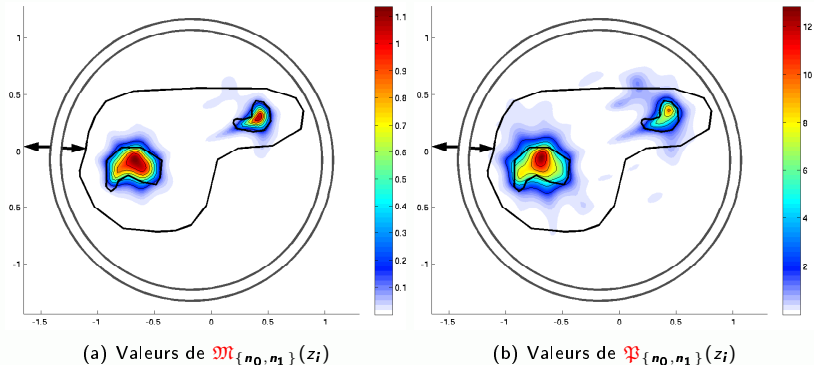
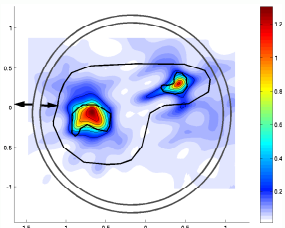
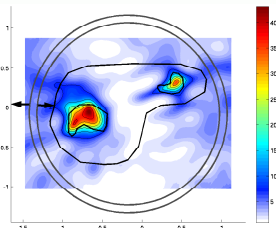


Fig.: Faible bruitage des mesures

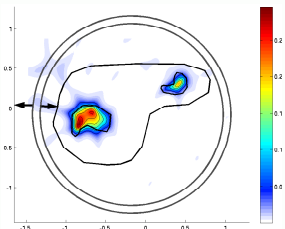
Validation d'une conjecture



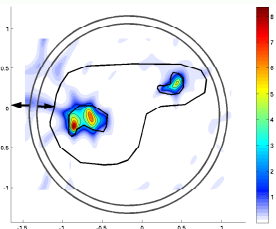
(a) Valeurs de $\mathfrak{M}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$ avec W



(b) Valeurs de $\mathfrak{P}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$ avec W

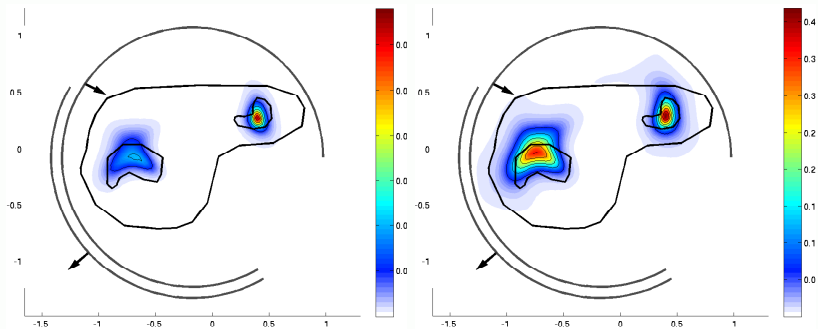


(c) Valeurs de $\mathfrak{M}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$ avec $|\Delta_F|$



(d) Valeurs de $\mathfrak{P}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)$ avec $|\Delta_F|$

Fig.: Fort bruitage des mesures



(a) Valeurs de $\Re\{\mathfrak{M}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)\}$ avec $|\Delta_F|$

(b) Valeurs de $\Im\{\mathfrak{P}_{\{n_0, n_1\}}(z_i)\}$ avec $|\Delta_F|$

Fig.: Emissions **décorréllées** des réceptions

Conclusions

- Extension du principe de la méthode de “Factorization” à la reconstruction de forme de **défauts en champ lointain**
- Développement de **deux méthodes**
- **Validation numérique** de ces méthodes
- Validation numérique d’une **possibilité d’extension** de ces méthodes

Perspectives

- **Etendre le cadre d’application** des méthodes de reconstruction de défauts
- Ajouter la reconstruction des fonctions tests à partir de mesures
→ **Détection de mouvement**
- Intégrer ces informations dans un schéma de **reconstruction globale des paramètres** d’objets

Merci pour votre attention