

Une méthode de reconstitution d'indice de réfraction acoustique utilisant la "Factorization Method".

Yann Grisel (yann.grisel@onera.fr)

ONERA-DTIM, Toulouse

Université Toulouse III

Thèse encadrée par : J.P. Raymond (Université Toulouse III), P.A. Mazet (ONERA-DTIM, Toulouse ; Université Toulouse III) et V. Mouysset (ONERA-DTIM, Toulouse)

Résumé *L'indice de réfraction acoustique d'objets diffractants peut être reconstitué en itérant la minimisation linéarisée et régularisée de la distance entre des mesures du champ proche et la simulation obtenue par l'indice cherché. Nous proposons l'étude d'une régularisation construite à partir d'une méthode de reconstitution de domaine appelée "Factorization Method". Enfin, nous étudions aussi les possibilités d'utilisation de cette méthode pour effectuer un raffinement adaptatif du domaine de reconstitution de l'indice.*

A. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

La diffraction est le phénomène qui se produit quand une onde incidente h rencontre un objet diffractant D , survient un phénomène physique appelé diffraction qui modifie l'onde. La différence entre le champ total après diffraction et l'onde incidente est appelé le champ diffracté, qui sera noté u^s . C'est ce qui est représenté sur Fig. 1. Dans le cadre de la propagation d'ondes, D peut être modélisé par son indice de réfraction $n(x)$. Cette valeur est normalisée à 1 dans l'air et on aura alors $D \subset \mathbb{R}^d = \text{support}(1 - n(x))$ ($d=2$ or 3). Lorsqu'on considère des ondes incidentes harmoniques en temps, on peut isoler la partie spatiale de l'onde et alors $u^s(x)$ vérifie l'équation de Helmholtz :

$$\begin{cases} \Delta u^s + k^2 n(x) u^s = -k^2 n(x) h, & x \in \mathbb{R}^d \\ \text{Condition de radiation de Sommerfeld } u^s. \end{cases} \quad (1)$$

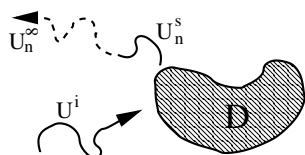


Fig. 1 – Les champs incident, diffracté et lointain.

Nous cherchons à reconstituer numériquement l'indice de réfraction $n(x)$ à partir de données u_0 mesurées sur une surface Σ en champ proche. Une méthode pour ce faire est de chercher un $n(x)$ qui

va minimiser la différence entre ces mesures et la simulation du champ diffracté qu'on obtiendrait avec l'indice proposé. C'est à dire qu'on cherche à minimiser la fonctionnelle suivante :

$$\mathcal{J}_0(n) := \|\mathcal{F}(n) - u_0\|_{L^2(\Sigma)}^2, \quad (2)$$

avec $\mathcal{F} : n \mapsto u^s|_{\Sigma}$ et u^s étant la solution de (1). Les problèmes qui consistent à retrouver les conditions initiales à partir de résultats mesurés sont appelés problèmes inverses. Ceci est donc un problème inverse qui est de plus non linéaire et mal posé (pas de dépendance continue). Ceci veut dire qu'une faible variation dans la mesure pourrait provenir d'une grande variation dans l'indice d'origine.

B. LA MÉTHODE GÉNÉRALE

La non linéarité peut être traitée en produisant une suite de problèmes linéarisés dont les solutions convergeraient vers la solution du problème d'origine. Le caractère mal posé d'un problème inverse se traduit par des opérateurs très proches d'être non inversibles. Une façon de contourner cette difficulté est de régulariser la fonctionnelle (2) mais il faut alors faire un compromis entre régulariser le moins possible pour être le plus proche possible de la solution exacte et régulariser un minimum pour pouvoir atteindre pratiquement une solution.

Reprenant la démarche initiée par Ségui [Sé00], nous avons étudié une régularisation de Tychonov couplée à une méthode de Gauss-Newton pour linéariser le problème. Cette méthode consiste à produire une suite d'itérés $n_{p+1} = n_p + \delta_p n_p$, avec δ_p

défini comme étant le minimiseur de la fonctionnelle régularisée et linéarisée à n_p fixé $\tilde{\mathcal{J}}_\alpha(\delta n) :=$

$$\|\mathcal{F}'(n_p) \cdot \delta n - (u_0 - \mathcal{F}(n_p))\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \alpha \|\delta n_p\|_X^2, \quad (3)$$

où $\|\cdot\|_X$ est une certaine norme et α un paramètre de régularisation. Il est ensuite prouvé que la suite $n_{p+1} = n_p + \delta n_p$ converge localement vers un minimiseur pour (2). Si $\|\cdot\|_X = \langle B \cdot, \cdot \rangle_{L^2(D)}$, alors δn_p est aussi caractérisé par l'unique racine de l'expression normale

$$(\mathcal{F}'(n_p)^* \mathcal{F}'(n_p) + \alpha B) \delta n_p - \mathcal{F}'(n_p) (u_0 - \mathcal{F}(n_p)). \quad (4)$$

Cette formulation équivalente ramène l'évaluation de la solution δ_p pour (3) à la résolution d'une équation linéaire.

Il apparaît clairement que le choix de $\|\cdot\|_X$, et donc B , influe sur la convergence. L'indice $n(x)$ est recherché uniquement dans D . On est alors naturellement amené à considérer des normes sur D . Par exemple la norme $L^2(D)$. Nous allons étudier la construction d'un espace $L^2(D)$, mais avec une mesure pondérée, dont la norme naturelle sera utilisée en tant que $\|\cdot\|_X$. Ce poids sera construit à partir d'une méthode de reconstitution rapide de domaine telle que la "Factorization method" développée par Kirsch [?].

C. LA "FACTORIZATION METHOD"

Cette méthode nous donne une fonction caractéristique de D sous forme d'un problème de minimisation sous contraintes à partir de la donnée du champ lointain u^∞ , qui est le comportement asymptotique de u^s (voir Fig. 1) produit par la diffraction par D d'ondes planes en tant qu'ondes incidentes :

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, z \in D \iff W_n(z) > 0,$$

avec $W_n(z) :=$

$$\inf \left\{ \left| \langle F_n^\infty \psi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} \right|, \langle \Phi_z^\infty, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} = 1 \right\},$$

où F_n^∞ est l'opérateur de champ lointain des solutions de (1) avec des ondes planes comme ondes incidentes, Γ une partie de la sphère unité S_1^d et Φ_z^∞ le champ lointain du noyau de Green pour (1) avec $n(x) = 1$ (espace libre). Cette méthode est valide dans le cas de données incomplètes ($\Gamma \subsetneq S_1^d$) et d'objets permmissifs définis par un indice de réfraction $n(x)$. Son nom vient de l'utilisation d'une factorisation symétrique de l'opérateur de champ lointain : $F_n^\infty = GAG^*$. Fig. 2 présente un exemple numérique des valeurs obtenues par évaluation de $W_n(z)$.

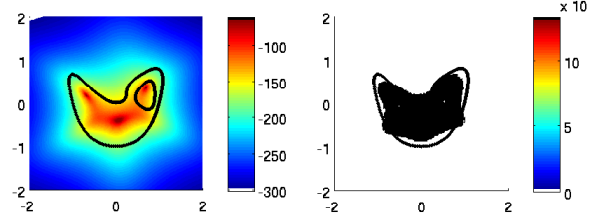


Fig. 2 – $W_n(z)$ et la norme de son gradient.

Plaçons maintenant une inhomogénéité Ω dans D et nommons \tilde{n} l'indice de réfraction de cette nouvelle configuration. Comme l'indique Fig. 3, nous sommes alors en présence de deux champs lointains : u_n^∞ et $u_{\tilde{n}}^\infty$.

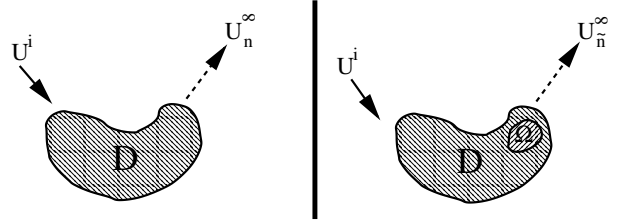


Fig. 3 – Les champs lointains sans et avec l'inclusion.

En nous inspirant des travaux de Kirsh et Gebauer [Geb06], nous construisons alors une nouvelle fonction "caractéristique" $\tilde{W}_{\{\tilde{n}, n\}}(z)$ à partir de la soustraction des deux opérateurs de champ lointain $F_{\tilde{n}}^\infty$ et F_n^∞ : $\tilde{W}_{\{\tilde{n}, n\}}(z) :=$

$$\inf \left\{ \left| \langle (F_{\tilde{n}}^\infty - F_n^\infty) \psi, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} \right|, \langle \Phi_z^\infty, \psi \rangle_{L^2(\Gamma)} = 1 \right\}.$$

Les points où cette fonction est au dessus d'un certain seuil semblent donner une bonne représentation de la forme de la "différence" entre $\tilde{n}(x)$ et $n(x)$: Ω (see [GMMR09]). Fig. 4 en présente un exemple numérique.

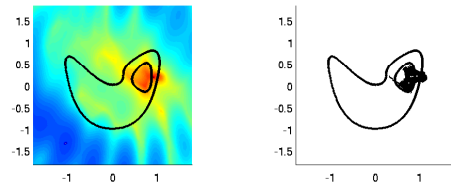


Fig. 4 – Reconstitution de l'inclusion et norme du gradient de $\tilde{W}_{\{\tilde{n}, n\}}$.

Nous allons alors utiliser les valeurs calculées de $\tilde{W}_{\{\tilde{n}, n\}}$ comme pondération pour la norme $L^2(D)$ afin de construire une régularisation pour (3).

D. RECONSTITUTION DE L'INDICE

On recherche la valeur de $n(x)$ pour $x \in D$. La norme $\|\cdot\|_X$ présente dans (3) doit donc porter sur D , par exemple $L^2(D)$. Des résultats sensiblement

plus robustes qu'avec la norme $L^2(D)$ ont été présentés dans [Sé00] en prenant une semi norme norme $BV(D)$, elle même régularisée. Efficace, cette méthode est néanmoins fortement sensible au choix du paramètre de régularisation α . La norme BV mesure les sauts de $n(x)$. Nous avons alors étudié une norme $L^2(D)$ avec une mesure pondérée par $\tilde{W}_{\{\tilde{n},n\}}$ pour donner de l'importance aux points où $n(x)$ est éloigné de l'indice proposé. Les résultats, comparables à ceux obtenus avec la semi norme BV régularisée, sont encourageants.

Fig. 5 présente un exemple avec $n(x) = 2.8 + 0.4i$ quand $x \in B([0.3, 0.3], 0.4)$ et $n(x) = 1.6 + 0.2i$ ailleurs (ellipse centrée en $(0,0)$, de grand rayon $a = 1.2$ et petit rayon $b = 1$). Bien sur $n(x) = 1$ en dehors de D . Dans cet exemple $n(x)$ est recherché sous la forme d'une fonction à valeurs complexes, constante par morceaux dans 41 zones avec un nombre d'onde $k = 5$ et un bruit sur les données de 10%.

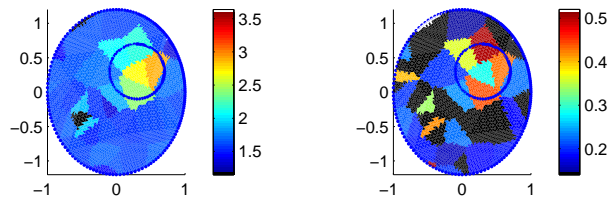


Fig. 5 – Reconstitution de $n(x)$ avec la norme de l'espace $L^2(D)$ à poids (parties réelle et imaginaire).

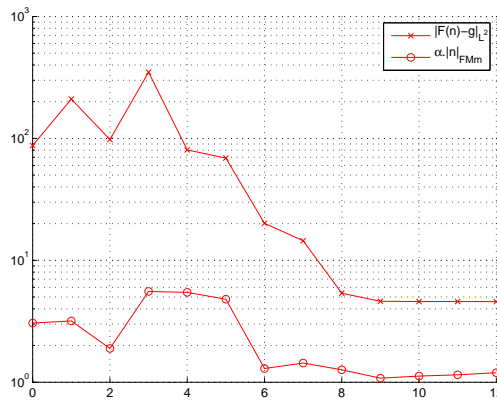


Fig. 6 – Valeurs de la fonction coût (2) et de $\alpha \|\cdot\|_X$.

E. DÉCOUPAGE ADAPTATIF POUR LA RECONSTITUTION

La méthode de reconstitution présentée ici est très couteuse en temps de calcul. De par sa nature itérative bien sur, et de par la complexité de l'évaluation des termes présents dans (4), dont on cherche un zéro à chaque étape. Comme $\tilde{W}_{\{\tilde{n},n\}}$ fournit une information locale sur la différence entre \tilde{n} et n , nous étudions un procédé de raffinement adaptatif pour la reconstitution afin d'accélérer les premières évaluations

du δ_p annulant (4). Pour ce faire nous évaluons des itérations successives de $n_p(x)$ jusqu'à ce que la variation d'indice soit inférieure à un certain seuil, puis nous évaluons $\tilde{W}_{\{n_{p+1},n\}}$ et nous utilisons cette donnée locale pour définir les zones qui nécessiteraient une représentation plus fine. Nous reprenons alors les itérations sur cette nouvelle discrétisation de D jusqu'à convergence, et ainsi de suite.

Fig. 9 montre les zones dans lesquelles $n(x)$ sera recherché en tant que fonction constante par morceaux (à valeurs complexes) pour chaque relance des itérations.

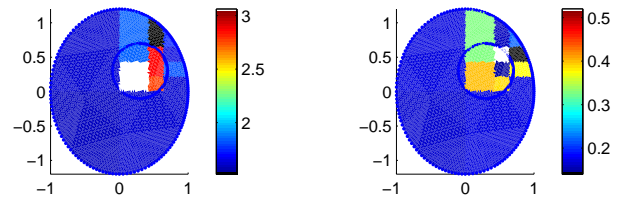


Fig. 7 – $n(x)$ après convergence de la fonction coût (2).

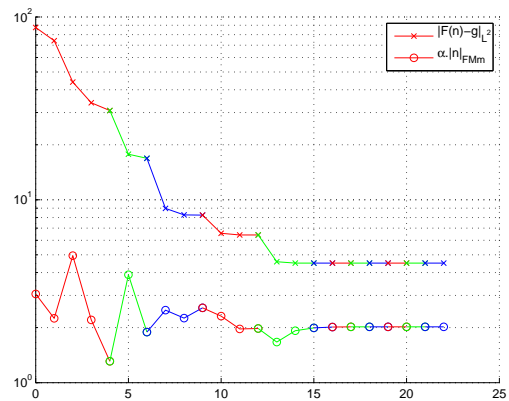


Fig. 8 – Valeurs de la fonction coût (2) et de $\alpha \|\cdot\|_X$.

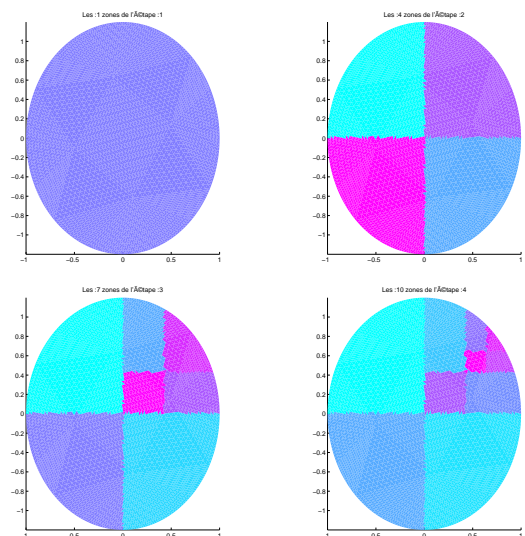


Fig. 9 – Découpages successifs de D .

RÉFÉRENCES

- [Geb06] B. Gebauer. The factorization method for real elliptic problems. *Journal for analysis and its applications*, 25 :81–102, 2006.
- [GMMR09] Y. Grisel, P.A. Mazet, V. Mouysset, and J.P. Raymond. An application of the factorization method to the detection of inclusions in acoustics. In *Waves 2009 proceedings*, pages 290–291. INRIA, 2009.
- [Sé00] L. Ségui. *Sur un problème inverse en diffraction d’ondes : identification de permittivités complexes d’un matériau à partir de données du champ proche*. PhD thesis, Université Toulouse III, 2000.